<u>שאלה 1 (מבחן תשע"ב מועד ב)</u>

תהיי

$$A=\begin{pmatrix}0&2&1\\1&0&0\\1&2&0\end{pmatrix}\in\left(\mathbb{Z}_3\right)^{3\times3}$$

א. מצא את הפולינום האופייני של המטריצה A , והראה שהוא מתפרק לגורמים ליניאריים מעל $\mathbb{Z}_3$.

ב. מצא את צורת ג'ורדן של A .

ג. מצא מטריצה הפיכה $P\in\left(\mathbb{Z}_3\right)^{3\times3}$ כך שהמטריצה $J=P^{-1}AP$ היא בצורת ג'ורדן.

<u>פתרון</u>

א.

$$|A-\lambda I|=\left|\begin{pmatrix}-\lambda&2&1\\1&-\lambda&0\\1&2&-\lambda\end{pmatrix}\right|=-\lambda\left|\begin{pmatrix}-\lambda&0\\2&-\lambda\end{pmatrix}\right|-2\left|\begin{pmatrix}1&0\\1&-\lambda\end{pmatrix}\right|+1\left|\begin{pmatrix}1&-\lambda\\1&2\end{pmatrix}\right|=$$

$$-\lambda\cdot\lambda^2+2\lambda+2+\lambda=-\lambda^3+3\lambda+2\Rightarrow P_A\left(\lambda\right)=\lambda^3+1=\left(\lambda+1\right)^3$$

ב. נמצא את הפולינום המינימאלי

$$A+I=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}\Rightarrow\left(A+I\right)^2=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&0&1\\1&0&2\end{pmatrix}$$

$$\left(A+I\right)^3=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&0&1\\1&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

שימו לב: לא הייתי צריך לחשב את $\left(A+I\right)^3$ (חשבו למה...).

הפולינום המינימאלי הוא $m_A\left(\lambda\right)=\left(\lambda+1\right)^3$ ולכן צורת ג'ורדן של A (חייב להיות בלוק ג'ורדן של ערך עצמי 2 מסדר 3) $J=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$

ג. נשים לב ש $Col\left(A+I\right)^2\subseteq Col\left(A+I\right)\cap V_2\subseteq V_2$ כעת $Col\left(A+I\right)^2=span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ ובנוסף

$\left(A+I\right)^2e_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ ואז המסלול הוא $\left\{\left(A+I\right)^2e_1,\left(A+I\right)e_1,e_1\right\}$ ז"א $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ המטריצה

המג'רדנת היא $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$. בדיקה: נשים לב ש $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&2&2\\1&0&2\end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&2&2\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&1\\1&0&0\\1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&2&2\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

<u>שאלה 2 (מבחן תשע"א מועד ב)</u>

תהיי

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&-2\\0&1&2&0\end{pmatrix}$$

א. האם יש מטריצה הפיכה $P\in\mathbb{R}^{4\times4}$ כך ש $P^{-1}AP$ בצורת ג'ורדן?

ב. מצא מטריצה הפיכה $P\in\mathbb{C}^{4\times4}$ כך ש $P^{-1}AP$ בצורת ג'ורדן.

<u>פתרון</u>

א. נמצא תחילה את הפולינום האופייני

יש לחשב את

$$|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix}\lambda&0&-1&0\\0&\lambda&0&-1\\-1&0&\lambda&2\\0&-1&-2&\lambda\end{pmatrix}\right|$$

נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix}\lambda&0&-1&0\\0&\lambda&0&-1\\-1&0&\lambda&2\\0&-1&-2&\lambda\end{pmatrix}\overset{R_1\leftrightarrow R_3}{\sim}\begin{pmatrix}-1&0&\lambda&2\\0&\lambda&0&-1\\\lambda&0&-1&0\\0&-1&-2&\lambda\end{pmatrix}\overset{\substack{\lambda R_1+R_3\to R_3\\R_2\leftrightarrow R_4}}{\sim}\begin{pmatrix}-1&0&\lambda&2\\0&-1&-2&\lambda\\0&0&\lambda^2-1&2\lambda\\0&\lambda&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\overset{\lambda R_2+R_4\to R_4}{\sim}\begin{pmatrix}-1&0&\lambda&2\\0&-1&-2&\lambda\\0&0&\lambda^2-1&2\lambda\\0&0&-2\lambda&\lambda^2-1\end{pmatrix}\to P_A(\lambda)=\left(\lambda^2-1\right)^2+4\lambda^2=\left(\lambda^2-1-2i\lambda\right)\left(\lambda^2-1+2i\lambda\right)=(\lambda-i)^2(\lambda+i)^2$$

הפולינום האופייני לא מתפרק לגורמים ליניאריים מעל $\mathbb{R}$ ולכן לא קיימת מטריצה הפיכה $P\in\mathbb{R}^{4\times4}$ כך ש $P^{-1}AP$ בצורת ג'ורדן.

ב. הפולינום האופייני הוא $(\lambda-i)^2(\lambda+i)^2$

נבדוק מהו הפולינום המינימאלי

$$(A-i)(A+i)=\begin{pmatrix}-i&0&1&0\\0&-i&0&1\\1&0&-i&-2\\0&1&2&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i&0&1&0\\0&i&0&1\\1&0&i&-2\\0&1&2&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0&-2\\0&2&2&0\\0&-2&-2&0\\2&0&0&-2\end{pmatrix}$$

$$(A-i)^2(A+i)=\begin{pmatrix}-i&0&1&0\\0&-i&0&1\\1&0&-i&-2\\0&1&2&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0&-2\\0&2&2&0\\0&-2&-2&0\\2&0&0&-2\end{pmatrix}\neq 0$$

$$(A-i)(A+i)^2=\begin{pmatrix}2&0&0&-2\\0&2&2&0\\0&-2&-2&0\\2&0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i&0&1&0\\0&i&0&1\\1&0&i&-2\\0&1&2&i\end{pmatrix}\neq 0$$

הפולינום המינימאלי הוא $(\lambda-i)^2(\lambda+i)^2$.

נחשב את

$$Col(A-i)\cap V_i=Span\left\{\begin{pmatrix}-i\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-i\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-i\\2\end{pmatrix}\right\}\cap\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4:\begin{pmatrix}-i&0&1&0\\0&-i&0&1\\1&0&-i&-2\\0&1&2&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}-i&0&1&0\\0&-i&0&1\\1&0&-i&-2\\0&1&2&-i\end{pmatrix}\left(\alpha\begin{pmatrix}-i\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\-i\\0\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\0\\-i\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\alpha\begin{pmatrix}0\\0\\-2i\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\-2i\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-2i\\2\\-4\\-4i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\gamma=0,\alpha=i,\beta=1\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\-i\\i\\1\end{pmatrix}$$

מכיוון ש $\begin{pmatrix}1\\-i\\i\\1\end{pmatrix}\in Col(A-I)$ קיים u כך ש $(A-I)u=\begin{pmatrix}1\\-i\\i\\1\end{pmatrix}$ מכיוון ש $\gamma=0,\alpha=i,\beta=1$ נקבל ש

$u=\begin{pmatrix}i\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ מהמסלול הראשון קבל $\left\{\begin{pmatrix}1\\-i\\i\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

$$Col\left(A+i\right)\cap V_i = Span\left\{\begin{pmatrix} i\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0\\i\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1\\0\\i\\2\end{pmatrix}\right\}\cap\left\{\begin{pmatrix} x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} i&0&1&0\\0&i&0&1\\1&0&i&-2\\0&1&2&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} i&0&1&0\\0&i&0&1\\1&0&i&-2\\0&1&2&i\end{pmatrix}\left(\alpha\begin{pmatrix} i\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 0\\i\\0\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} 1\\0\\i\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\alpha\begin{pmatrix} 0\\0\\2i\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 0\\0\\-2\\2i\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} 2i\\2\\-4\\4i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\gamma=0,\alpha=-i,\beta=1\Rightarrow\begin{pmatrix} 1\\i\\-i\\1\end{pmatrix}$$

מכיוון ש $\begin{pmatrix} 1\\i\\-i\\1\end{pmatrix}\in Col\left(A+I\right)$ קיים u כך ש $\left(A+I\right)u=\begin{pmatrix} 1\\i\\-i\\1\end{pmatrix}$ מכיוון ש $\gamma=0,\alpha=-i,\beta=1$ נקבל

ש $u=\begin{pmatrix} -i\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ מהמסלול הראשון קבל $\left\{\begin{pmatrix} 1\\i\\-i\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} -i\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

$\left\{\begin{pmatrix} 1\\i\\-i\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} -i\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1\\-i\\i\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} i\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ המטריצה המג'רדנת $P=\begin{pmatrix} 1&-i&1&i\\i&1&-i&1\\-i&0&i&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}$

<u>שאלה 3 (מבחן תשס"ב מועד א)</u>

מצא את צורת ג'ורדן של המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

<u>פתרון</u>

הפולינום האופייני $P_A\left(\lambda\right)=\left(\lambda-1\right)^3$.

$$A-I=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow (A-I)^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$ ולכן הפולינום המינימאלי הוא $m_A(\lambda)=(\lambda-1)^2$

וצורת ג'ורדן $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

<u>שאלה 4 מבחן תשס"ב מועד ב)</u>

תהיי $A\in\mathbb{C}^{8\times 8}$ מטריצה שהפולינום האופייני שלה הוא $(t-1)^4(t-2)^4$, והפולינום המינימאלי שלה הוא $(t-1)^2(t-2)$. נתון שהריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי 1 של A הוא 2.

מצא את צורת ג'ורדן של A.

<u>פתרון</u>

מכיוון שהריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי 1 של A הוא 2.

$$\begin{pmatrix}2&0&0&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0&0&0\\0&0&0&2&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

<u>שאלה 5</u>

הוכח את משפט ג'ורדן עבור מטריצות ממשפט ג'ורדן עבור אופרטורים ליניאריים.