שיעור 11

קומבינטוריקה

עקרון הסכום

אם A,B קבוצות סופיות וזרות, אז $|A\cup B|=|A|+|B|$.

עקרון הסכום המוכלל

תהיינה $A_1,A_2,...,A_n$ קבוצות סופיות וזרות אז $\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|$.

עקרון המכפלה

אם A,B קבוצות סופיות, אז $|A\times B|=|A|\cdot|B|$.

הוכחה

נתון ש A,B קבוצות סופיות. $A=\{a_1,a_2,...,a_n\},B=\{b_1,b_2,...,b_m\}$ ואז

נתון ש A,B קבוצות סופיות.

$$A\times B=\left\{\overbrace{\overbrace{(a_1,b_1),...,(a_1,b_m)}^{m-times},\overbrace{(a_2,b_1),...,(a_2,b_m)}^{m-times},...,\overbrace{(a_n,b_1),...,(a_n,b_m)}^{m-times}}^{n-times}\right\}$$

ובסה"כ נקבל $m\cdot n$ איברים.

עקרון המכפלה המוכלל

תהיינה $A_1,A_2,...,A_n$ קבוצות סופיות. אז: $\left|\bigtimes_{i=1}^{n}A_i\right|=\prod_{i=1}^{n}|A_i|$.

משפט

לכל שתי קבוצות סופיות A,B מתקיים $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

בחירה עם חזרות כשהסדר חשוב

משפט

תהיי A קבוצה, $|A|=n$, ויהי $k\in\mathbb{N}$. מספר הסדרות באורך k שניתן לבנות מאיברי A הוא n^k.

הוכחה

אוסף הסדרות באורך k הוא הקבוצה $\overbrace{A\times A\times...A}^{k-times}$ ממשפט קודם נקבל ש

$$\left|\overbrace{A\times A\times...A}^{k-times}\right|=\overbrace{|A|\cdot...\cdot|A|}^{k-times}=|A|^k.$$

דוגמא

מספר הסדרות באורך 8 שניתן לבנות מאיברי הקבוצה $A=\{1,2,3\}$ הוא 3^8.

הגדרה

תהי A קבוצה, $|A|=n$. סדרה באורך n ללא חזרות של איברי A נקרא תמורה (פרמוטציה) של A.

משפט

מספר התמורות של $\{1,2,...,n\}$ הוא $n!$.

הוכחה

מספר האפשרויות לבחור את האיבר הראשון הוא n, מכיוון שאיבר אחד נבחר כבר עבור האיבר הראשון נקבל שמספר האפשרויות לבחור את האיבר השני בסדרה הוא $n-1$ וכן הלאה...

ואז מספר האפשרויות לקבל סדרה באורך n הוא $n!$ $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1=n!$.

דוגמא

התמורות האפשריות עבור הקבוצה $A=\{1,2,3\}$ הן

$(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)$ קיבלנו $3!$ תמורות.

בחירה ללא חזרות כשהסדר חשוב

משפט

תהי A קבוצה, $|A|=n$, ויהי $0\le k\le n$ מספר הסדרות באורך k ללא חזרות שניתן לבנות מאיברי A הוא: $\frac{n!}{(n-k)!}$.

דוגמא

מספר האפשרויות לבחור מקבוצה עם 5 איברים סדרה באורך 3 שכל איבריה שונים זה מזה הוא $20=\frac{5!}{3!}$.

בחירה ללא חזרות כשהסדר אינו חשוב

משפט

תהי A קבוצה, $|A|=n$, ויהי $0\le k\le n$. מספר התת-קבוצות של A בגודל k הוא $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

דוגמא

מספר התתי קבוצות עם שלושה איברים שיש לקבוצה $A=\{1,2,3,4\}$ הוא $4=\frac{4!}{3!1!}$.

שימו לב שמספר הסדרות באורך 3 הוא

$$
\begin{aligned}
&(1,2,3),(1,3,2),\ldots.\Rightarrow 3!\\
&(1,2,4),(1,4,2),\ldots\Rightarrow 3!\\
&(2,3,4),(2,4,3),\ldots\Rightarrow 3!\\
&(1,3,4),(1,4,3),\ldots\Rightarrow 3!
\end{aligned}
.
$$

תרגיל

חשב את מספר הסדרות הבנויות מ s אפסים ו t אחדים הוא $\binom{s+t}{s}$.

פתרון

אורך הסדרה הוא $s+t$. בסדרה יש s אפסים. מתוך $s+t$ המקומות בסדרה נבחר s מקומות עבור האפסים. מספר האפשרויות לבחור את s המקומות הוא $\binom{s+t}{s}$, לאחר בחירת s המקומות נשאר t מקומות עבור האחדים. לכל בחירה של s מקומות עבור האפסים יש אפשרות אחת לשבץ את t האחדים ואז סה"כ מספר האפשרויות הוא $\binom{s+t}{s}$.

בחירה עם חזרות שהסדר חשוב

משפט

תהי A קבוצה, $|A|=n$. מספר הדרכים לבחור k איברים מתוך איברי A כשמותרות חזרות בבחירה והסדר אינו חשוב, הוא $\binom{n+k-1}{n-1}$.

<u>הוכחה</u>

נניח ש $A=\{1,2,3,...,n\}$. נסמן ב x_i את מספר הפעמים שמופיעה הספרה i.

המספרים x_i צריכים לקיים את שני התנאים הבאים:

א. $x_i \ge 0$ עבור כל $i \in A$.

ב. $\sum_{i=1}^{n} x_i = k$.

כלומר שי לחשב את מספר האפשרויות לקבל פתרון למשוואה $\sum_{i=1}^{n} x_i = k$ כאשר $x_i \ge 0$ עבור כל $i \in A$.

נבנה סדרה באופן הבא: $\overbrace{0...0}^{x_1-times}1\overbrace{0...0}^{x_2-times}1\overbrace{0...0}^{x_3-times}1\overbrace{0...0}^{x_4-times}....1\overbrace{0...0}^{x_n-times}$. עבור כל סדרה נקבל פתרון למשוואה $\sum_{i=1}^{n} x_i = k$, ולכן מספר הסדרות $\overbrace{0...0}^{x_1-times}1\overbrace{0...0}^{x_2-times}1\overbrace{0...0}^{x_3-times}1\overbrace{0...0}^{x_4-times}....1\overbrace{0...0}^{x_n-times}$ שווה למספר האפשרויות לקבל פתרון למשוואה $\sum_{i=1}^{n} x_i = k$ שווה למספר הדרכים לבחור k איברים מתוך A כשמותרות חזרות בבחירה והסדר אינו חשוב.

מספר האפסים בסדרה הוא k מספר האחדות הוא $n-1$ ולפי משפט קודם מספר האפשרויות לבנות סדרה באורך $n+k-1$ עם k אפסים ו $n-1$ אחדות הוא $\binom{n+k-1}{n-1}$.

<u>תרגיל</u>

יהי $n \in \mathbb{N}$. נתונים n דרדסים, n קטקטים ו - n טרולים. בכמה דרכים ניתן לסדר אותם בשורה:

א. בלי מגבלות.

ב. קונדסון(הדרדס) וטיפטיפ (הקטקט) אינם מוכנים לשבת אחד ליד השני.

ג. כל הדרדסים ישבו צמודים, כל הקטקטים ישבו צמודים וכל הטרולים ישבו צמודים.

ד. אסור ש-2 טרולים ישבו אחד ליד השני.

ה. בין קונדסון (הדרדס) וטיפטיפ (הקטקט) יש לפחות $3n-3$ יצורים.

<u>פתרון</u>

א. נערבב את $3n$ היצורים וזאת ב-$(3n)!$ דרכים.

ב. נספור את כל המקרים ונפחית את המקרים בהם קונדסון וטיפטיפ יושבים אחד ליד השני(נקח אותם כגוש ונערבב יחד עם כולם). נקבל $(3n)!-(3n-1)!\cdot 2!$.

ג. ניקח את הדרדסים כגוש, את הקטקטים כגוש ואת הטרולים כגוש. יש $3!$ אפשרויות לערבב את הגושים ואז יש לערבב את הדרדסים, הקטקטים והטרולים. לכן $3!\cdot n!\cdot n!\cdot n!$.

ד. נמקם את הדרדסים הקטקטים וזאת ב- $(2n)!$ דרכים ואז נמקם את הטרולים ברווחים (כולל הקצוות) וזאת ב- $p(2n+1,n)=\frac{(2n+1)!}{(n+1)!}$ דרכים. לכן נקבל $p(2n+1,n)\cdot(2n)!$.

ה. קונדסון וטיפטיף יכולים להיות בקצוות או שאחד מהם נמצא במקום ליד הקצה (והאחר בקצה). לכן יתכנו 3 מקרים (ובכל אחד מהם ניתן להחליף את המקומות של קונדסון וטיפטיף). בכל אחד מהמקרים הללו נותר למקם את $3n-2$ היצורים שנותרו. לכן נקבל $3\cdot 2!\cdot(3n-2)!$.

<u>תרגיל</u>

בכמה דרכים ניתן לחלק 6 כדורים לבנים ו – 4 כדורים צבעוניים (ב 4 צבעים שונים) ל – 10 תאים שונים כך ש:

א. בכל תא יהיה כדור אחד בדיוק.

ב. בכל תא יהיה כדור אחד לבן לכל היותר ואין מגבלה על מספר הכדורים הצבעוניים בכל תא.

ג. אין מגבלה על מספר הכדורים בכל תא.

<u>פתרון</u>

א. נבחר 6 מקומות להניח את הלבנים (בלי חשיבות לסדר) וזאת ב- $\binom{10}{6}$ דרכים ואז יש $4!$ דרכים "לערבב" את הצבעוניים. סה"כ $\binom{10}{6}\cdot 4!=\frac{10!}{4!\cdot 6!}\cdot 4!=\frac{10!}{6!}$. דרך אחרת: נבחר 4 מקומות להניח את הצבעוניים (יש חשיבות לסדר) וזאת ב- $p(10,4)=\frac{10!}{6!}$ ואז יש רק דרך אחת להניח את הלבנים.

ב. נבחר 6 מקומות להניח את הלבנים (בלי חשיבות לסדר) וזאת ב- $\binom{10}{6}$ דרכים ואז יש 10^4 דרכים למקם את הצבעוניים. סה"כ $\binom{10}{6}\cdot 10^4$.

ג. מספר הדרכים למקם 6 כדורים לבנים (זהים) ב-10 תאים שונים כך שתכולת כל תא היא בלתי מוגבלת הוא $\binom{15}{9}=\binom{10-1+6}{10-1}=D(10,6)$ ואז יש 10^4 דרכים למקם את הצבעוניים. סה"כ $\binom{15}{9}\cdot 10^4$.

הסתברות

מרחב המדגם

ניקח ניסוי שלא ניתן לחזות את תוצאותיו בוודאות מראש, אבל ניתן לדעת את כל תוצאותיו האפשריות.

קבוצת כל התוצאות האפשריות של הניסוי הנ"ל מכונה מרחב המדגם של הניסוי.

נסמן את מרחב המדגם ב Ω.

דוגמאות

1. אם תוצאת הניסוי היא הסדר שבו שמונה אצנים מגיעים לקו הגמר, אז מרחב המדגם הוא -
$\Omega=\left\{\left(i_1,i_2,i_3,\ldots,i_8\right)\right\}$ ויש במרחב המדגם !8 איברים.
2. אם הניסוי הוא הטלת מטבע שתי פעמים, אז במרחב המדגם יש ארבע תוצאות אפשריות.
3. אם הניסוי הוא הטלת שתי קוביות, אדומה וכחולה, אז במרחב המדגם יש 36 תוצאות אפשריות.

מאורע

כל תת קבוצה A של מרחב המדגם נקרא מאורע.

למשל: בדוגמא 3 הקבוצה $A=\left\{(1,2),(3,4)\right\}$ היא מאורע.

איחוד מאורעות

המאורע $A\cup B$ מתרחש אם לפחות אחד משני המאורעות, A ו B, מתרחש.

דוגמא

נניח שהניסוי הוא זריקת שתי קוביות.

$$A=\left\{(1,2),(3,4)\right\}, B=\left\{(1,2),(4,5)\right\} \Rightarrow A\cup B=\left\{(1,2),(3,4),(4,5)\right\}.$$

חיתוך מאורעות

המאורע $A\cap B$ מתרחש רק אם שני A ו B מתרחשים.

$$A=\left\{(1,2),(3,4)\right\}, B=\left\{(1,2),(4,5)\right\} \Rightarrow A\cap B=\left\{(1,2)\right\}.$$

מאורעות זרים

אם A ו B מאורעות כך ש $A\cap B=\phi$ אז נאמר שהמאורעות A ו B זרים.

דוגמא

נניח שהניסוי הוא זריקת שתי קוביות.

$A=\left\{(4,6),(3,4)\right\}, B=\left\{(1,2),(4,5)\right\}$ מאורעות זרים.

מאורע משלים

עבור מאורע A נגדיר את המאורע A^c, המכונה המשלים של המאורע A, כמאורע המכיל את כל האיברים שנמצאים במרחב המדגם Ω שאינן נמצאות ב A.

אקסיומות ההסתברות

עבור ניסוי שמרחב המדגם שלו הוא Ω אנו מניחים שלכל מאורע A במרחב המדגם מוגדר מספר $P(A)$,

המקיים את שלוש האקסיומות שלהלן:

1. $0 \le P(E) \le 1$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. לכל סדרה של מאורעות זרים $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ מתקיים $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$.

$P(A)$ מכונה ההסתברות של המאורע A.

דוגמא

אם בניסוי של הטלת מטבע מניחים שלתוצאה H יש אותו סיכוי להתקבל כמו לתוצאה T, אז -

$P(\{H\}) = P(\{T\}) = \frac{1}{2}$.

אם הסיכוי לקבל H גדול פי שניים מהסיכוי לקבל T, אז - $P(\{H\}) = \frac{2}{3}; P(\{T\}) = \frac{1}{3}$.

תכונות בסיסיות

1. $P(\varnothing) = 0$.
2. $1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$ ולכן $P(A) = 1 - P(A^c)$.
3. אם $A \subseteq B$ אז $P(A) \le P(B)$.
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

דוגמא

מטילים שני מטבעות בזה אחר זה. בהנחה שכל ארבעת הנקודות במרחב המדגם

$\Omega = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$ הן שוות הסתברות, ההסתברות של כל אחת מהן היא $\frac{1}{4}$.

נסמן - $A = \{(H,H),(H,T)\}; B = \{(H,H),(T,H)\}$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

מרחב מדגם בעל תוצאות שוות-הסתברות

נניח שבניסוי מסוים לכל התוצאות במרחב המדגם יש אותו סיכוי להתקבל.

נניח שמרחב המדגם של הניסוי הוא קבוצה סופית, נאמר $\Omega = \{1, 2, ..., n\}$.

$P\left(\{1\}\right)=P\left(\{2\}\right)=P\left(\{3\}\right)=....=P\left(\{n\}\right)=\frac{1}{n}$ ואז לפי אקסיומה 3 נקבל ש $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}$.

כאשר $N(A)$ מציין את מספר האיברים ב A ו $N(\Omega)$ מציין את מספר האיברים ב Ω.

<u>תרגיל</u>

קערה מכילה 11 כדורים ממוספרים: 6 לבנים ו 5 שחורים. מוציאים באקראי, בזה אחר זה, 3 כדורים מן הקערה. מהי ההסתברות שאחד מהם לבן והשניים האחרים שחורים?

<u>פתרון</u>

מספר האפשרויות להוציא שלושה כדורים הוא $11\cdot10\cdot9=990$.

מספר האפשרויות שהכדור הראשון לבן ושני האחרים שחורים הוא $6\cdot5\cdot4=120$.

מספר האפשרויות שהכדור השני לבן ושני האחרים שחורים הוא $5\cdot6\cdot4=120$.

מספר האפשרויות שהכדור השלישי לבן ושני האחרים שחורים הוא $5\cdot4\cdot6=120$.

ההסתברות המבוקשת היא: $\frac{120+120+120}{990}=\frac{4}{11}$.

<u>תרגיל</u>

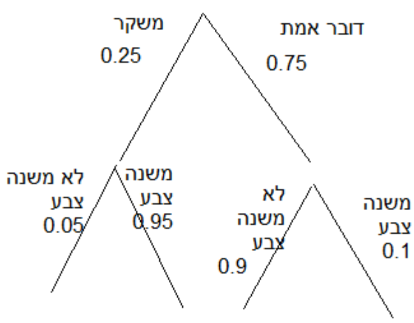
במדינת הגמדים חלק מהגמדים דוברי אמת וחלק מהגמדים דוברי שקר. ראש המדינה החליט למגר את התופעה וביקש מהקוסם הראשי להמציא כובע קסמים.
הכובע משנה את צבעו ברגע שגמד משקר.
הקוסם החליט לעשות ניסוי על עשרים גמדים.
הוא הזמין חמישה גמדים שקרנים וחמישה עשר גמדים דוברי אמת.
אם גמד משקר אז ההסתברות שהכובע ישנה את צבעו היא 0.95.
אם דובר אמת אז ההסתברות שהכובע ישנה את צבעו היא 0.1.

<u>פתרון</u>

נסמן: A - גמד דובר אמת, $\overline{A}$ - גמד משקר.

יש 15 מתוך 20 גמדים דוברי אמת ולכן $P(A)=\frac{3}{4}\Leftarrow P(\overline{A})=\frac{1}{4}$.

אם גמד משקר אז ההסתברות שהכובע ישנה את צבעו היא 0.95.
אם גמד דובר אמת אז ההסתברות שהכובע ישנה את צבעו היא 0.1
נקבל את עץ האפשרויות הבא:



יש שתי אפשרויות שהכובע יחליף את צבעו.

אפשרות 1 – הגמד דובר אמת והכובע מחליף את צבעו. $0.75 \cdot 0.1 = 0.075$.

אפשרות 2 – הגמד משקר והכובע מחליף את צבעו. $0.25 \cdot 0.95 = 0.2375$.

ההסתברות שכובע יחליף את צבעו היא: $0.075 + 0.2375 = 0.3125$.

<u>הסתברות מותנית ואי תלות</u>

לעיתים נרצה לדעת את ההסתברות במרחב מדגם מצומצם.

למשל:

נתבונן בתוצאות המשחקים של מכבי תל אביב:

ליגה ישראלית: 22 ניצחונות, 5 הפסדים.

יורוליג: 15 ניצחונות, 15 הפסדים.

יש הבדל אם מרחב המדגם הוא כל המשחקים, המשחקים בליגה הישראלית או המשחקים ביורוליג.

אם נתבונן במשחקים ביורוליג אז ההסתברות לבחור משחק באקראי שבו מכבי ניצחה היא $\frac{1}{2}$.

אם מרחב המדגם הוא כלל המשחקים של מכבי

אז ההסתברות לבחור משחק באקראי שבו מכבי ניצחה היא $\frac{37}{57}$.

<u>הגדרה</u>

ההסתברות המותנית של A בתנאי B מסומנת ב $P(A/B)$.

אם $P(B) > 0$, אז $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

<u>דוגמא</u>

נתבונן בדוגמא הקודמת. מרחב המדגם הוא כלל המשחקים של מכבי.

נשים לב שמרחב המדגם כולל 57 נקודות.

נסמן A להיות המאורע שכולל את כלל הניצחונות של מכבי, במאורע A יש 37 נקודות.

נסמן B להיות המאורע שכולל את כל המשחקים של מכבי באירופה, במאורע B יש 30 נקודות.

נשים לב שבמאורע $A \cap B$ יש 15 נקודות.

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.

<u>תרגיל</u>

תא מכיל 10 כדורים לבנים, 5 צהובים ו 10 שחורים. מוציאים באקראי כדור מן התא, ומתברר שהוא אינו שחור. מהי ההסתברות שהכדור הזה צהוב.

<u>פתרון</u>

נסמן ב A את המאורע שהכדור שהוצא צהוב, ונסמן ב B^C את המאורע שהכדור שהוצא אינו שחור.

$$P\left(A/B^c\right)=\frac{P\left(A\cap B^c\right)}{P\left(B^c\right)}=\frac{5/25}{15/25}=\frac{1}{3}.$$

<u>תרגיל</u>

בבית ספר יסודי, לומדים בנים ובנות בשלוש שכבות בגיל: א', ב', ג'. ההסתברות לבחור מתוך כל תלמידי בית הספר, בן שלומד בכיתה א' היא 0.1. חמישית מהתלמידים בבית הספר הן בנות שלומדות בכיתה ב'. מתוך 200 תלמידי בית הספר, 60 לומדים בכיתה ב'.

נגדיר ארבעה מאורעות:

- המאורע A הוא "ללמוד בכיתה א". - המאורע B הוא "ללמוד בכיתה ב".
- המאורע C הוא "ללמוד בכיתה ג". - המאורע D הוא "להיות בן".

א. מצא מהו תחום הערכים האפשרי של ההסתברויות: 1. $P(D)$ 2. $P\left(A\cap \overline{D}\right)$.

ב. נתון: $P\left(C\cap D\right)=P\left(B\cap \overline{D}\right)$, $P\left(C/\overline{D}\right)=0.25$. חשבו את ההסתברויות הבאות:

1. $P\left(A/\overline{D}\right)$. 2. $P\left(D/B\right)$ 3. $P\left(A\cup \overline{D}\right)$.

ג. אחת לשבוע, בוחרים באקראי תלמיד לנקות את הבמה לקראת שבת. חשבו את ההסתברות שבמשך שבועיים רצופים יבחר מישהו מכיתה א', ולאחר מכן במשך שלושה שבועות רצופים תיבחר בת כלשהי.

<u>פתרון</u>

א. ההסתברות לבחור בן שלומד בכיתה א היא: 0.1 ולכן $P\left(A\cap D\right)=0.1$.

חמישית מהתלמידים הם בנות שלומדות בכיתה ב ולכן $P\left(B\cap \overline{D}\right)=0.2$.

60 מתוך 200 לומדים בכיתה ב ולכן $P\left(B\right)=0.3$.

$$P\left(B\cap \overline{D}\right)+P\left(B\cap D\right)=P\left(B\right)\Leftarrow 0.2+P\left(B\cap D\right)=0.3\Leftarrow P\left(B\cap D\right)=0.1$$

נרשום את הנתונים בטבלה ונקבל

	A	B	C	
D	0.1	0.1		
$\overline{D}$		0.2		
		0.3		1

מכיוון ש

$$P\left(D\right)=P\left(A\cap D\right)+P\left(B\cap D\right)+P\left(C\cap D\right)\Leftarrow P\left(D\right)=0.2+P\left(C\cap D\right)\Leftarrow 0.2\le P\left(D\right)$$

$$P\left(\overline{D}\right)=P\left(A\cap \overline{D}\right)+P\left(B\cap \overline{D}\right)+P\left(C\cap \overline{D}\right)\Leftarrow P\left(\overline{D}\right)=P\left(A\cap \overline{D}\right)+0.2+P\left(C\cap \overline{D}\right)\Leftarrow 0.2\le P\left(\overline{D}\right)$$

מכיוון ש $P\left(D\right)+P\left(\overline{D}\right)=1$ נקבל ש $P\left(D\right)\le 0.8$.

סה"כ תחום הערכים $0.2\le P\left(D\right)\le 0.8$.

$$P\left(A\right)+P\left(B\right)+P\left(C\right)=1\Leftarrow P\left(A\right)+0.3+P\left(C\right)=1\Leftarrow P\left(A\right)+P\left(C\right)=0.7\Leftarrow P\left(A\right)\le 0.7$$

$P\left(A\cap D\right)+P\left(A\cap \overline{D}\right)=P\left(A\right)\Leftarrow P\left(A\cap \overline{D}\right)=P\left(A\right)-0.1$ מכיוון ש $P\left(A\right)\le 0.7$ נקבל ש $P\left(A\cap \overline{D}\right)\le 0.6$.

הסתברות לא יכולה להיות שלילית ולכן $0 \le P(A \cap \overline{D}) \le 0.6$.

ב. $P(C \cap D) = P(B \cap \overline{D}) = 0.2$, $P(C/\overline{D}) = 0.25 \Leftarrow \dfrac{P(C \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = 0.25$.

	C	B	A	
0.4	0.2	0.1	0.1	D
0.6	0.15	0.2	0.25	$\overline{D}$
1	0.35	0.3	0.35	

$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) \Rightarrow P(D) = 0.4$.

$P(D) + P(\overline{D}) = 1 \Rightarrow P(\overline{D}) = 0.6$. $\dfrac{P(C \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = 0.25 \Rightarrow P(C \cap \overline{D}) = 0.15$.

$P(\overline{D}) = P(A \cap \overline{D}) + P(B \cap \overline{D}) + P(C \cap \overline{D}) \Rightarrow P(C \cap \overline{D}) = 0.25$.

$P(A \cap D) + P(A \cap \overline{D}) = P(A) \Rightarrow P(A) = 0.35$.

$P(A) + P(B) + P(C) = 1 \Rightarrow P(C) = 0.35$.

ב1.

$$P(A/\overline{D}) = \frac{P(A \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0.25}{0.6} = \frac{5}{12}.$$

ב2.

$$P(D/B) = \frac{P(D \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3}.$$

ב3.

$$P(A \cup \overline{D}) = P(A) + P(\overline{D}) - P(A \cap \overline{D}) = 0.7.$$

ג.

ההסתברות לבחור פעמיים רצוף מישהו מכיתה א היא 0.4^2.

ההסתברות לבחור במשך שלוש פעמים רצוף בת היא: 0.3^3.

סה"כ ההסתברות היא $0.4^2 \cdot 0.3^3 = 0.00432$.

<u>מאורעות בלתי תלויים</u>

המקרה ש $P(A) = P(A/B)$ נאמר שהמשתנים A ו B בלתי תלויים ונקבל ש $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

<u>דוגמא</u>

בוחרים באקראי קלף מתוך חפיסה רגילה של 52 קלפים. אם A הוא המאורע שהקלף הנבחר הוא אס, ו B הוא המאורע שהוא עלה, אז A ו B הם מאורעות בלתי תלויים.

$$P(B) = \frac{13}{52}, P(A) = \frac{4}{52}, P(A \cap B) = \frac{1}{52} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$