שטח של משטח

בשביל לחשב שטח של משטח, מחלקים אותו למקביליות קטנות, וסוכמים את השטח שלהן באמצעות אינטגרל.

תזכורת: $|x_1 \times x_2| = \sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}$

לכן החישוב הוא

$$\boxed{S = \int \mathrm{d}A = \int |x_1 \times x_2|\, \mathrm{d}u_1\, \mathrm{d}u_2 = \int \sqrt{\det g_{ij}}\, \mathrm{d}u_1\, \mathrm{d}u_2}$$

($\mathrm{d}A$ נקראת "תבנית שטח")

(דוגמה

חשב שטח של המיספירה של ספירה ברדיוס ρ:

...)

עקמומיות של גאוס

בהינתן משטח S, נגדיר את העתקת גאוס, שבוחרת ווקטור נורמל באורך 1 בצורה יחידה:

$$N : \underset{p \to N(p)}{S \to S^2}$$

לפי זה נגדיר העתקה

$$W : \underset{v \to N_v}{T_p \to T_p}$$

כך ש$N_v \perp N\left(p\right)$

W נקראת "העתקת ווינגארדן", והיא העתקה לינארית בT_p. נרצה להציג את W כמטריצה:

$\{X_1, X_2\}$(ווקטורי הנגזרת ע"פ הקואורדינטות) הם בסיס של T_p.

$$N_1 = W\left(X_1\right) = L_1^1 X_1 + L_1^2 X_2$$

$$N_2 = W\left(X_2\right) = L_2^1 X_1 + L_2^2 X_2$$

$$\Downarrow$$

$$W = \begin{pmatrix} L_1^1 & L_1^2 \\ L_2^1 & L_2^2 \end{pmatrix}$$

תמיד אפשר ללכסן את W:

$$W=\begin{pmatrix}K_1 & 0\\ 0 & K_2\end{pmatrix}$$

כאשר K_1,K_2 עקמומיות ראשיות - מעידים על העקמומיות הגדולה והקטנה ביותר של עקומות על המשטח שעוברות באותה נקודה.

- אם $K_1\cdot K_2>0$ אז זו נקודה אליפטית(המשטח דומה לאליפסויד באותה נקודה)
- אם $K_1\cdot K_2<0$ אז זו נקודה היפרבולית(נקודת אוכף)
- אם $K_1\cdot K_2=0$ אז זו נקודה פרבולית(המשטח דומה למישור או לגליל בסביבת אותה נקודה)

הגדרה

עקמומיות גאוס: $K=K_1\cdot K_2$

משפט 1

$$K=\det\left(W\right)=\det\left(L_i^j\right)$$

המשפט המדהים

K תכונה פנימית

הקשר בין המקדמים L_i^j וg_{ij} וL_{ij}

$$\boxed{L_i^j=-L_{ik}g^{kj}}\Leftrightarrow\boxed{-L_i^m g_{mk}=L_{ik}}$$

זה אומר ש

$$\begin{pmatrix}L_1^1 & L_1^2\\ L_1^2 & L_2^2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}L_{11} & L_{12}\\ L_{21} & L_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g^{11} & g^{12}\\ g^{21} & g^{22}\end{pmatrix}$$

(תזכורת: $\left(g^{ij}\right)=\left(g_{ij}\right)^{-1}$)
ולכן

$$\det\left(L_i^j\right)=\det\left(L_{ij}\right)\cdot\det\left(g^{ij}\right)$$

משפט 2

$$K = \frac{\det(L_{ij})}{\det(g_{ij})}$$

מקדמי ווינגארטן

$$N_1 = W(X_1) = L_1^1 X_1 + L_1^2 X_2$$

$$N_2 = W(X_2) = L_2^1 X_1 + L_2^2 X_2$$

איך מחשבים L_{ij}?(תבנית יסודית 2)

$$L_{ij} = \langle X_{ij}, n \rangle$$

דוגמה - טורוס סיבוב

ניקח פרמטריזציה של מעגל שאינו מקיף את הראשית:

$$\gamma(t) = (a\cos t + b, 0, a\sin t)$$

נסובב אותו סביב ציר ה$[z]$, ונקבל פרמטריזציה של טורוס:

$$X(\theta, t) = ((a\cos t + b)\cos\theta, (a\cos t + b)\sin\theta, a\sin t)$$

(באופן כללי, אם $\gamma(t) = (f(t), 0, g(t))$, סיבוב שלו סביב ציר ה$[z]$ הוא $X(\theta, t) = (f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta, g(t))$)

1. נחשב g_{ij}:

$$\begin{matrix} X_\theta = (-(a\cos t + b)\sin\theta, (a\cos t + b)\cos\theta, 0) \\ X_t = (-(a\sin t)\cos\theta, -(a\sin t)\sin\theta, a\cos t) \end{matrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow g_{ij} = \begin{pmatrix} (a\cos t + b)^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

2. נחשב את מקדמי ווינגארטן. בשביל זה נחשב את ווקטור הנורמל בכל נקודה לפי הגדרה:

$$n(\theta, t) = \frac{X_\theta \times X_t}{\|X_\theta \times X_t\|}$$

$$X_\theta \times X_t = \cdots = (a\,(a\cos t + b)\cos t\cos\theta, a\,(a\cos t + b)\cos t\sin\theta, a\,(a\cos t + b)\sin t)$$

תזכורת: $\|X_\theta \times X_t\| = \sqrt{\det g_{ij}}$. במקרה שלנו:

$$\|X_\theta \times X_t\| = \sqrt{\det g_{ij}} = a\,(a\cos t + b)$$

לכן

$$n\,(\theta, t) = (\cos t\cos\theta, \cos t\sin\theta, \sin t)$$

נחשב נגזרות של הנורמל:

$$n_\theta = (-\cos t\sin\theta, \cos t\cos\theta, 0) = \frac{\cos t}{a\cos t + b} X_\theta + 0 \cdot X_t$$

$$n_t = (-\sin t\cos\theta, -\sin t\sin\theta, \cos t) = 0 \cdot X_\theta + \frac{1}{a} \cdot X_t$$

קיבלנו שהעתקת ווינגארטן היא

$$W = \begin{pmatrix} \frac{\cos t}{a\cos t + b} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

3. נחשב את המקדמים L_{ij}. יש שני דרכים לעשות זאת:

- לפי הנוסחה $L_{ij} = \langle X_{ij}, n\rangle$:

$$X_{\theta\theta} = (-\,(\dots)\cos\theta, -\,(\dots)\sin\theta, 0)$$

$$X_{\theta t} = (a\sin t\sin\theta, -a\sin t\cos\theta, 0)$$

$$X_{tt} = (-a\cos t\cos\theta, -a\cos t\sin\theta, -a\sin t)$$

$$L_{11} = \langle X_{\theta\theta}, n\rangle = -a\cos t\,(a\cos t + b)$$

$$L_{12} = \langle X_{\theta t}, n\rangle = 0$$

$$L_{22} = \langle X_{tt}, n\rangle = -a$$

הנוסחה נרשום אותם בתור מטריצה:

$$L_{ij} = \begin{pmatrix} -a\cos t\,(a\cos t + b) & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$

- ניתן להשתמש בנוסחה $L_i^j = -L_{ik}g^{km}$ כדי לחשב L_i^j מתוך L_{ij} וg_{ij}:

$$L_1^2 = -L_{1k}g^{k2} = -\underbrace{L_{11}g^{12}}_{=0} - \underbrace{L_{12}g^{22}}_{=0}$$

$$L_2^2 = L_{2k}g^{k2} = -\underbrace{L_{21}}_{=0}\underbrace{g^{12}}_{=0} - \underbrace{L_{22}}_{=-a}\underbrace{g^{22}}_{=\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{a}$$

4. נחשב את עקמומיות גאוס:

$$K = \det(W) = \begin{vmatrix} \frac{\cos t}{a\cos t+b} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{vmatrix} = \frac{\cos t}{a\,(a\cos t + b)}$$

משמעות גיאומטרית

ראינו שלמרות שטורוס היא צורה סימטרית, העקמומיות תלויה בנקודה. נרצה להבין אילו נקודות הן אליפטיות($K > 0$), היפרבוליות($K < 0$) או פרבוליות($K = 0$).

$b > a > 0$, לכן $a\cos t + b > 0$, לכן $a\,(a\cos t + b) > 0$ - כלומר המכנה תמיד חיובי - ומה שיקבע לנו את סימן העקמומיות זה המונה.

$K = 0$: $\cos t = 0$. זה קורה כש$t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ - כלומר המעגלים העליונים והתחתונים של הטורוס.

$K > 0$: $\cos t > 0$. זה קורה כש$0 < t < \frac{\pi}{2} \vee \frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$ - החלק החיצוני של הטורוס.

$K < 0$: $\cos t < 0$. זה קורה כש$\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$ - החלק הפנימי של הטורוס.