88-524-תרגיל 4-פתרון:

1. יהי $F=Z_7$. יהי A המישור האפיני מעל F.

א) כמה נקודות יש ב- FP^1?

8 7+1

ב) כמה נקודות יש ב-A?

$A=\{(x,y,1):x,y\in F\}\Rightarrow |A|=7^2$

ג) כמה ישרים יש ב- A?

כמספר הישרים במישור הפרוייקטיבי פחות הישר באינסוף: $(7^2+7+1)-1=56$

ד) כמה נקודות וישרים יש ב- FP^2?

$(7^2+7+1)=57$

ה) מצאו את נקודות החיתוך של שני הישרים $2x+5y-z=0$, $x-y+3z=0$ ב- FP^2.

נשים לב כי: $(1,-1,3)*2=(2,5,-1) \pmod 7$ לכן זה אותו ישר ולכן נק' החיתוך שלהם הם כל הנק' עליהם, שמונה במספר: (0,3,1), (1,4,1), (2,5,1), (3,6,1), (6,2,1), (5,1,1), (4,0,1), (1,1,0).

2. על-מישור במרחב הפרויקטיבי FP^n מוגדר כקבוצת הנקודות

$$\{(x_1,\ldots,x_{n+1})\in FP^n : a_1x_1+\ldots+a_{n+1}x_{n+1}=0\}$$

כאשר ה- $a_i\in F$ לא כולם 0.

מספר העל מישורים ב- FP^n הוא כמספר הנקודות בו. לכן

א) עבור $F=Z_5$ מספר על-מישורים ב- FP^4: $5^4+5^3+5^2+5+1=781$.

ב) עבור $F=Z_7$ מספר על-מישורים ב- FP^3: $7^3+7^2+7+1=400$.

3. יהי $F=Z_2$ שדה בעל שני איברים.

א) כמה ישרים יש ב- FP^2? כמה נקודות יש על כל ישר?

$2^2+2+1=7$ ישרים ונקודות, עבור $z\neq 0$ נקודות במישור האפיני,עבור $z=0$ נקודות באינסוף.

2+1 נקודות על כל ישר (2+1 ישרים דרך כל נקודה).

ב) מהן הנקודות על הישר באינסוף?

השיפועים האפשריים: $0,1\sim -1,\infty$.

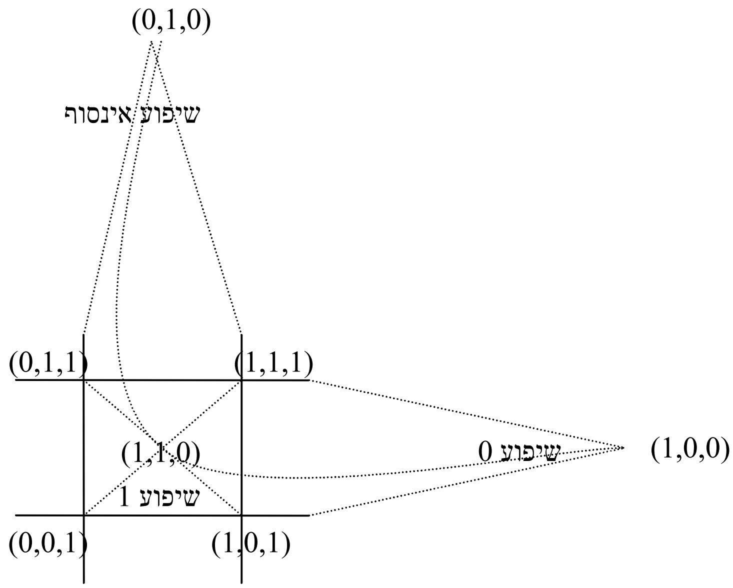
עבור 0: $(1,0,0)$, עבור $1(=-1)$: $(1,1,0)$, עבור אינסוף: $(0,1,0)$.

ג) רשמו את כל הנקודות ב- FP^2.

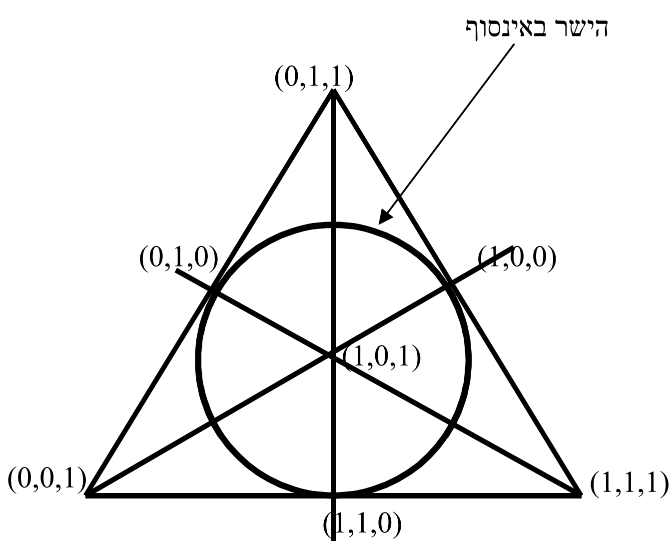
במישור האפיני $\rightarrow (0,0,1),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,1)$

באינסוף $\rightarrow (1,0,0),(1,1,0),(0,1,0)$

ג) ציירו מודל של FP^2 : ז"א – ציירו את הנקודות ואת הישרים העוברים דרכן על פי א), ב).

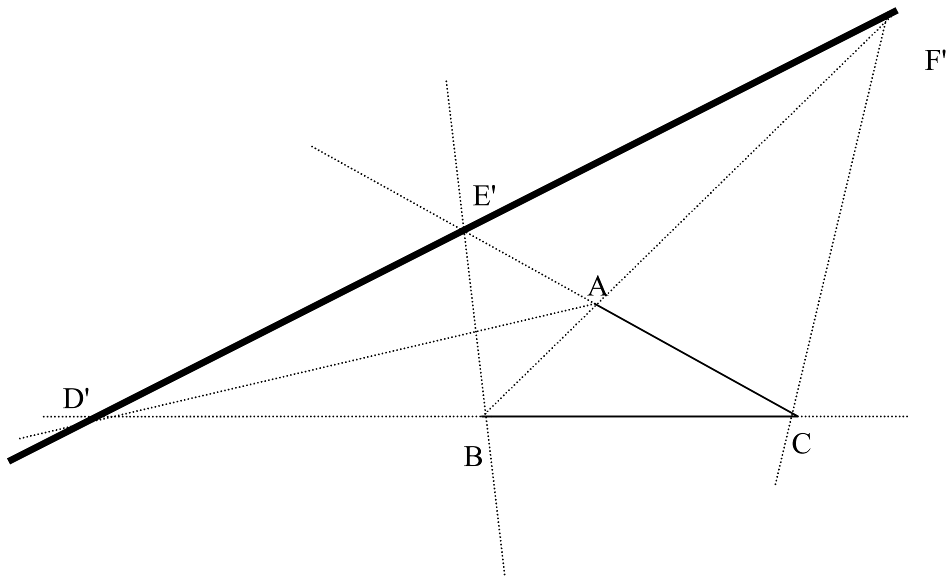


או:



4. יהי ABC משולש ויהיו AD',BE',CF' חוצי הזויות החיצוניות כש- $D'\in BC, E'\in CA, F'\in AB$.
הוכיחו: D',E',F' קולינאריות.

עבור משולש ABC נגדיר את חיתוך חוצה הזוית החיצונית של C עם AB כ 'F ואת חיתוך חוצה הזוית החיצונית של B עם AC כ 'E. כעת נגדיר את חיתוך 'E'F עם BC להיות 'D ונוכיח כי D'A הוא חוצה הזוית החיצונית של A:



לפי מנלאוס על ABC : $\frac{AF'}{F'B}\frac{BD'}{D'C}\frac{CE'}{E'A}=-1$ כי הגדרנו את 'D על 'E'F.

כעת, ממשפט חוצה הזוית החיצונית עבור C : $\frac{CE'}{D'C}=\frac{F'E'}{F'D'}$

וממשפט חוצה הזוית עבור B : $\frac{BD'}{F'B}=\frac{E'D'}{E'F'}$

ולכן:

$$\frac{AF'}{E'F'}\frac{E'D'}{F'D'}\frac{F'E'}{E'A}=-1$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{AF'}{E'A}\frac{E'D'}{F'D'}=1$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{AF'}{E'A}=\frac{F'D'}{E'D'}$$

לכן לפי משפט חוצה הזוית החיצונית ההפוך 'AD הוא חוצה זוית A.