

אלגברה לינארית 2 (88113) – בחינת סיום (מועד ג') פרופ' רון עדין

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
אין להשתמש בשום חומר עזר, כולל מחשבון.
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות, כל שאלה בעמוד נפרד. כל השאלות שוות משקל.
ניתן לסמן עמודים כ"טיוטה".
נא להסביר ולנמק בבירור את כל הפתרונות.

בהצלחה!

1.

- א. הגדירו: העתקה צמודה, תת-מרחב ניצב.
ב. יהיו: V מרחב מכפלה פנימית מממד סופי, $T: V \rightarrow V$ אופרטור לינארי כלשהו. הוכיחו: $(\text{im } T)^\perp = \ker T^*$
ג. בנתוני הסעיף הקודם הוכיחו: $(\ker T)^\perp = \text{im } T^*$. מותר להשתמש במסקנת הסעיף הקודם, גם אם לא הוכחתם אותה.

2.

א. תהי

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

- מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים עבור A .
ב. עבור A מהסעיף הקודם חשבו במפורש את A^{100} .
ג. עבור A הנ"ל חשבו את הפולינום האופייני של המטריצה $B = (A + 2I)^{100}$; אין צורך לחשב במפורש את B .

3.

- א. הגדירו: ליכסון מטריצה, שילוש מטריצה.
ב. תהינה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- קבעו, עבור כל שתים מהמטריצות הנ"ל, האם הן דומות. נמקו.
ג. תהינה $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ מטריצות דומות. הוכיחו: אם A הרמיטית ו- B אנטי-הרמיטית אז $A = B = 0$.

4. תהי $q(x, y) = x^2 + 4xy - 2y^2$ תבנית ריבועית מעל \mathbb{R} .
- א. רשמו מטריצה מייצגת סימטרית A עבור $q(x, y)$.
- ב. מצאו את הערכים העצמיים ואת הוקטורים העצמיים של A .
- ג. תארו במילים את אוסף הפתרונות של המשוואה $q(x, y) = 1$ (למשל: אליפסה, פרבולה, זוג ישרים נחתכים וכו'). נמקו.
5. יהיו: $V = \mathbb{R}^3$ עם המכפלה הסקלרית הרגילה, $W = \{(x, y, z) \in V \mid x + 2y + z = 0\}$.
- א. מצאו בסיס אורתונורמלי עבור W .
- ב. השלימו את הבסיס מהסעיף הקודם לבסיס אורתונורמלי של V .
- ג. מצאו את ההיטל הניצב של $v = (3, 3, 3) \in V$ על הישר W^\perp .