

דף תרגילים 6

1. נתון טורוס המתקבל כמשטח סיבוב של המעגל $(x-a)^2 + z^2 = b^2$ במישור xz סביב ציר ה- z ($a > b$)
- א. מצאו פרמטריזציה של הטורוס.
 - ב. חשבו את התבנית היסודית הראשונה של הטורוס.
 - ג. חשבו את סמלי גאמא של הטורוס.
2. נתונה פונקציה $f: R^2 \rightarrow R$ ע"י הנוסחה $f(x, y) = e^x + e^y$. נגדיר מטריקה ע"י
- $$G = \begin{pmatrix} f(x, y) & 0 \\ 0 & f(x, y) \end{pmatrix}$$
- חשבו את סמלי גאמא של המטריקה.
3. הוכיחו את הזהויות הבאות:
- א. $\langle x_{ij}, x_k \rangle = \Gamma_{ij}^s g_{sk}$
 - ב. $\langle x_{ij}, x_m \rangle g^{mk} = \Gamma_{ij}^k$
 - ג. $g_{ij:k} = \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle$
 - ד. $\langle x_{ii}, x_i \rangle = \frac{1}{2} g_{iii}$
4. נתון משטח ע"י פרמטריזציה $x(u^1, u^2)$ ידוע הפיתוח של וקטורי הנגזרות השניות לפי קואורדינטות הבסיס $\{x_1, x_2, n\}$, $x_{ij} = \Gamma_{ij}^k x_k + L_{ij} n$. הביעו:
- א. את המקדמים L_{ij} באמצעות x_{ij} ו- n , הוקטור הנורמל למשטח.
 - ב. את $\langle x_{ij}, x_{kl} \rangle$ באמצעות סמלי גאמא Γ_{ij}^k , מקדמי התבנית היסודית הראשונה g_{ij} והמקדמים L_{ij} .
5. נתון משטח ע"י פרמטריזציה $x(u^1, u^2)$. עבור העקומה $\beta = x \circ \alpha(t)$ על המשטח, הביעו את $\langle \beta'', n \rangle$ באמצעות הנגזרות של $\alpha(t)$ והמקדמים L_{ij} .
6. נתבונן במשטח M - ספירה ב- R^3 בעלת רדיוס 6 ומרכז בראשית הצירים. יהי $-6 < a < 6$
- א. מצאו פרמטריזציה מהירות יחידה של עקומת החיתוך γ_a של M עם המישור $\{z = a\}$.
 - ב. עבור איזה ערך של a העקומה הנ"ל היא עקומה גיאודזית של M ?
 - ג. עבור הערך של a מהסעיף הקודם נסמן $b = a + 1$ ונסמן את עקומת החיתוך בין M למישור $\{z = b\}$ ב- γ_b . קיימת ספירה אחת ויחידה עברה γ_b היא עקומה גיאודזית. מצאו פרמטריזציה של הספירה הזו.
 - ד. מצאו שתי נקודות $P, Q \in M$ בעלות התכונה הבאה: קיימים אינסוף קווים גיאודזים שונים $\beta: [t_1, t_2] \rightarrow M$ כך ש $\beta(t_1) = P, \beta(t_2) = Q$.
7. נתון המשטח המוגדר ע"י המשוואה $S = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 = 1\}$
- א. מצאו את כל העקומות הגיאודזיות על המשטח. הפרידו למקרים ותארו אותם בצורה.

ב. נסמן ב- γ_a את עקומת החיתוך של המשטח S עם המישור $\{z = a\}$. הראו שעבור עקומה גיאודזית $\beta(t)$, הזווית בין $\beta(t)$ לבין γ_a בנקודת החיתוך ביניהן אינה תלויה ב- a .