פתרון תרגיל בית 9 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תש"ף

שאלה 1 (חימום)**.** תהי G חבורה ותהי $H \lhd G$ תת־חבורה נורמלית. הפריכו את הטענות השגויות הבאות:

א. אם ${}^{G}/_{H}$ ציקלית ולא טריוויאלית, אז G אבלית.

ב. אם ${}^{G}/_{H}$ סופית ולא טריוויאלית, אז G סופית.

פתרון.

א. נבחר $G = S_3$ ואת $H = A_3$ שראינו בכיתה שהיא נורמלית ב-S_3. החבורה ${}^{G}/_{H}$ מסדר 2 (שהוא ראשוני) ולכן ציקלית. אבל G אינה אבלית.

ב. נבחר $G = \mathbb{Z}$ ואת $H = 2\mathbb{Z}$. אז ${}^{G}/_{H} \cong \mathbb{Z}_2$ מסדר 2, אבל G אינסופית.

שאלה 2 (חימום)**.** מצאו את הסימן של התמורה

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 2n & 1 \end{pmatrix} \in S_{2n}$$

ושל התמורה $\tau \in S_{2n}$ המוגדרת לפי $\tau(i) = 2n + 1 - i$.

פתרון. בכתיב של מכפלת מחזורים זרים, התמורה σ היא המחזור $(1, 2, 3, \dots, 2n)$, והוא מאורך זוגי. לכן הסימן הוא -1 והתמורה אי-זוגית.

התמורה τ היא המכפלה $(1, 2n)(2, 2n-1)(3, 2n-2)\dots(n, n+1)$ של n חילופים, ולכן הסימן שלה הוא $(-1)^n$, כלומר כמו הזוגיות של n.

שאלה 3. תהי G חבורה ותהינה H, K תת־חבורות נורמליות המקיימות $H \cap K = \{e\}$. הוכיחו כי G איזומורפית לתת־חבורה של ${}^{G}/_{K} \times {}^{G}/_{H}$.

פתרון. נתבונן בהעתקה: $f\colon G \to {}^{G}/_{K} \times {}^{G}/_{H}$ המוגדרת לפי

$$f(g) = (gH, gK)$$

תחילה יש להוכיח שזהו הומומורפיזם. אכן, לכל $g_1, g_2 \in G$ מתקיים

$$f(g_1g_2) = (g_1g_2H, g_1g_2K) = (g_1H, g_1K)(g_2H, g_2K) = f(g_1)f(g_2)$$

כשהשיוויון האמצעי נובע מהנורמליות של H ושל K. יהי $g \in \ker(f)$. כלומר מתקיים עבורו

$$f(g) = (gH, gK) = e_{G/K \times G/H} = (H, K)$$

ידוע לנו ש-$gH = H, gK = K$ אם ורק אם $g \in K$ וגם $g \in H$. כלומר

$$g \in H \cap K = \{e\}$$

אם כן, הגרעין של f הוא טריוויאלי ולכן f שיכון.

שאלה 4. בתרגיל הזה נראה שוב שאי אפשר לומר ששתי תמורות הן "צמודות סתם" מבלי לומר באיזו חבורה עובדים.

א. מצאו את מחלקת הצמידות של $(132) \in A_4$.

ב. תנו דוגמה לשתי תמורות שאינן צמודות ב-A_4, אבל כן צמודות ב-S_4. הוכיחו שהן גם צמודות ב-A_5. רמז: הביטו מעלה.

ג. הוכיחו שאם יש זוג תמורות שאינן צמודות ב-A_n, אך כן צמודות ב-S_n, אז הן גם צמודות ב-A_{n+2}.

פתרון.

א. מנוסחת ההצמדה ב-S_n אנחנו יודעים שכל התמורות הצמודות של (132) הן מחזורים מאורך 3. אבל במקרה זה, לא כל המחזורים מאורך 3 צמודים ל-(132). בפרט, אם $\sigma \in A_4$, אז

$$\sigma\,(132)\,\sigma^{-1} = (\sigma(1), \sigma(3), \sigma(2))$$

חישוב מפורט ב-A_4 יראה כי מחלקת הצמידות היא $\{(234)\,,(143)\,,(124)\,,(132)\}$.

ב. לפי החישוב בסעיף הקודם, התמורה (123) לא צמודה ל-(132) ב-A_4, אבל לפי מיון מחלקות הצמידות ב-S_n התמורות האלו צמודות ב-S_4. נחפש $\tau \in A_5$ כך ש-

$$\tau\,(132)\,\tau^{-1} = (\tau(1), \tau(3), \tau(2)) = (123)$$

אם נבחר את (23) נקבל שהתמורות צמודות, אך $(23) \notin A_5$. לכן נבחר $\tau = (45)\,(23)$ ונקבל שהן אכן צמודות, וגם ש-τ זוגית. דוגמה אחרת: מהצמדה בתמורה (14532) נקבל את (142).

ג. אם $a, b \in A_n$ לא צמודות ב-A_n, אך כן צמודות ב-S_n, אז קיימת $\sigma \in S_n$ כך ש-$\sigma a \sigma^{-1} = b$. בודאי ש-$\sigma \notin A_n$ שכן הנחנו כי a, b לא צמודות ב-A_n. לכן התמורה $\sigma \cdot (n+1, n+2)$ היא זוגית (מכפלה של שתי תמורות אי זוגיות) ובהצמדה של a נקבל

$$\sigma\cdot(n+1,n+2)\,a\,(\sigma\cdot(n+1,n+2))^{-1} = (n+1,n+2)\,(n+1,n+2)\,\sigma a \sigma^{-1} = b$$

ונעזרנו בכך ש-$(n+1, n+2)$ מתחלפת עם σ ועם a, כי אין להם מספרים משותפים שהן מזיזות. לכן a, b צמודות ב-A_{n+2}.

שאלה 5. יהי $n \geq 3$. הוכיחו כי תת־החבורה היחידה של S_n מאינדקס 2 היא A_n.
הדרכה: הניחו כי $H \leq S_n$ היא מאינדקס 2. הזכרו למה H תת־חבורה נורמלית ולמה לכל $\sigma \in S_n$ מתקיים $\sigma^2 \in H$. הוכיחו כי H מכילה את כל המחזורים מאורך 3, וסיימו לפי תרגיל מהכיתה.

פתרון. לפי ההדרכה, נניח עבור $H \leq S_n$ מתקיים $[S_n : H] = 2$. כל תת־חבורה מאינדקס 2 היא נורמלית. ראינו בכיתה תרגיל לפיו אם $N \lhd G$ תת־חבורה נורמלית מאינדקס n, אז $a^n \in N$ לכל $a \in G$. לכן לכל $\sigma \in S_n$ מתקיים כי $\sigma^2 \in H$. בפרט, לכל מחזור $(ijk) \in S_n$ מאורך שלוש מתקיים $(ijk)^2 = (ikj) \in H$. אבל הבחירה של i, j, k היא שרירותית, ולכן כל מחזור מאורך 3 שייך ל-H. בכיתה הוכחנו כי A_n נוצרת על ידי מחזורים מאורך 3, ולכן $A_n \subseteq H$. אבל האינדקס של A_n גם הוא 2, ולכן חייב להיות שיוויון $A_n = H$.

שאלה 6. תהינה $G_1, \ldots, G_n$ חבורות ותהינה $H_1, \ldots, H_n$ תת־חבורות נורמליות שלהן, בהתאמה (כלומר $H_i \lhd G_i$ לכל i).

א. הוכיחו כי $H_1 \times \cdots \times H_n \lhd G_1 \times \cdots \times G_n$.

ב. הוכיחו כי $(G_1 \times \cdots \times G_n) \,/\, (H_1 \times \cdots \times H_n) \cong {}^{G_1}/_{H_1} \times \cdots \times {}^{G_n}/_{H_n}$.

פתרון.

א. קל לראות כי $H_1 \times \cdots \times H_n$ היא תת־חבורה של $G_1 \times \cdots \times G_n$. כדי להראות שהיא נורמלית, נבדוק שהיא סגורה להצמדה באיבר של $G_1 \times \cdots \times G_n$. יהיו

$$(g_1, \ldots, g_n) \in G_1 \times \cdots \times G_n, \qquad (h_1, \ldots, h_n) \in H_1 \times \cdots \times H_n$$

אז נחשב

$$\begin{aligned}(g_1, \ldots, g_n)(h_1, \ldots, h_n)(g_1, \ldots, g_n)^{-1} &= (g_1h_1, \ldots, g_nh_n)\left(g_1^{-1}, \ldots, g_n^{-1}\right) \\ &= \left(g_1h_1g_1^{-1}, \ldots, g_nh_ng_n^{-1}\right)\end{aligned}$$

לכל $1 \leq i \leq n$, תת־החבורה H_i נורמלית ב-G_i ולכן $g_ih_ig_i^{-1} \in H_i$. קיבלנו כי $\left(g_1h_1g_1^{-1}, \ldots, g_nh_ng_n^{-1}\right) \in H_1 \times \cdots \times H_n$, כדרוש.

ב. נעזר במשפט האיזומורפיזם הראשון (הבינו למה כך פותרים את שני הסעיפים הראשונים בבת אחת). מפני ש-$H_i \lhd G_i$, אזי ${}^{G_i}/_{H_i}$ חבורה לכל i, ולכן המכפלה הקרטזית ${}^{G_1}/_{H_1} \times \cdots \times {}^{G_n}/_{H_n}$ היא חבורה. נגדיר העתקה

$$\begin{aligned}\pi \colon G_1 \times \cdots \times G_n &\to {}^{G_1}/_{H_1} \times \cdots \times {}^{G_n}/_{H_n} \\ (g_1, \ldots, g_n) &\mapsto (g_1H_1, \ldots, g_nH_n)\end{aligned}$$

שקל לראות שהיא על, כי היא "מכפלה קרטזית" של הטלות. נבדוק שהיא הומומורפיזם:

$$\begin{aligned}\pi(g_1, \ldots, g_n)\,\pi(g_1', \ldots, g_n') &= (g_1H_1, \ldots, g_nH_n)(g_1'H_1, \ldots, g_n'H_n) \\ &= (g_1g_1'H_1, \ldots, g_ng_n'H_n) = \pi(g_1g_1', \ldots, g_ng_n') \\ &= \pi((g_1, \ldots, g_n)(g_1', \ldots, g_n'))\end{aligned}$$

אגב, לכל קבוצה של הומומורפיזמים $f_i \colon G_i \to K_i$ הפונקציה $f \colon \prod_i G_i \to \prod_i K_i$ המוגדרת כך שברכיב ה-i נקבל $g_i \mapsto f_i(g_i)$ היא הומומורפיזם. נחשב את הגרעין של π:

$$\begin{aligned}\ker \pi &= \left\{(g_1, \ldots, g_n) \in G_1 \times \cdots \times G_n \,\middle|\, \pi(g_1, \ldots, g_n) = e_{G_1/H_1 \times \cdots \times G_n/H_n}\right\} \\ &= \{(g_1, \ldots, g_n) \in G_1 \times \cdots \times G_n \,|\, (g_1H_1, \ldots, g_nH_n) = (H_1, \ldots, H_n)\} \\ &= \{(g_1, \ldots, g_n) \in G_1 \times \cdots \times G_n \,|\, \forall i : g_i \in H_i\} = H_1 \times \cdots \times H_n\end{aligned}$$

ולפי משפט האיזומורפיזם הראשון נקבל את הדרוש.

שאלה 7. נראה שאיזומורפיות בתת־חבורות נורמליות ובחבורות המנה ביחד עדין לא גורר איזומורפיות בחבורה "למעלה".

א. תנו דוגמה לחבורה אבלית G_1, לתת־חבורה שלה $H_1 \lhd G_1$, לחבורה לא אבלית G_2 ולתת־חבורה שלה $H_2 \lhd G_2$, כך ש-$H_1 \cong H_2$ וגם ${}^{G_1}/_{H_1} \cong {}^{G_2}/_{H_2}$. רמז: אפשר לבחור את G_1, G_2 להיות מסדר 6 או 8.

ב. כמו בסעיף הקודם, אבל הפעם נדרוש ששתי החבורות G_1, G_2 הן אבליות ולא איזומורפיות. רמז: אפשר לבחור חבורות מסדר p^3.

פתרון.

א. כמו ברמז נבחר $G_1 = \mathbb{Z}_6$ ו-$G_2 = S_3$. ראינו שלשתיהן יש תת־חבורות מסדר 3, $H_1 = \langle 2 \rangle = \{0,2,4\}$ ו-$H_2 = A_3$. תת־החבורות H_i הן מאינדקס 2, ולכן נורמליות ב-G_i, בהתאמה. כל חבורה מסדר 3 איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_3$ וחבורות המנה ${}^{G_i}/_{H_i}$ הן מסדר $\frac{6}{3} = 2$, ולכן איזומורפיות ל-$\mathbb{Z}_2$. לכן $H_1 \cong \mathbb{Z}_3 \cong H_2$ וגם ${}^{G_1}/_{H_1} \cong \mathbb{Z}_2 \cong {}^{G_2}/_{H_2}$.
בחירה פופלרית אחרת יכולה להיות החבורות $G_1 = \mathbb{Z}_8$ ו-$G_2 = D_4$, עם תת־חבורות שאיזומורפיות ל-$\mathbb{Z}_4$ והמנה לגביהן איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_2$.

ב. למעשה לכל p ראשוני אפשר לבחור חבורות מסדר p^2. למשל נבחר את $G_1 = \mathbb{Z}_9$ ואת $G_2 = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ שהן לא איזומורפיות (הראשונה ציקלית והשנייה לא). לשתיהן תת־חבורות מסדר 3 (למשל $\langle 3 \rangle \leq G_1$ ו-$\langle (1,0) \rangle \leq G_2$), וחבורות המנה לגביהן תהינה מסדר 3. נקבל שוב ש-$H_1 \cong \mathbb{Z}_3 \cong H_2$, והפעם גם חבורות המנה איזומורפיות שתיהן ל-$\mathbb{Z}_3$.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה שלחו לנו את הפתרון שלהן.

שאלה 8. יהי p ראשוני. נזכיר כי חבורה נקראת חבורת-p אם הסדר של כל איבר הוא חזקה של p. כמו כן ראינו שלחבורת-p סופית יש מרכז לא טריוויאלי. מצאו חבורת-p עם מרכז טריוויאלי.
הדרכה אפשרית (אם אתם מוצאים חבורות אחרות נשמח לשמוע): התבוננו על הקבוצה של כל המטריצות האינסופיות מעל $\mathbb{Z}_p$ מהצורה

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_\infty \end{pmatrix}$$

כאשר I_∞ היא מטריצת יחידה אינסופית, 0 היא מטריצת אפס בגודל מתאים והמטריצה $A \in GL_n(\mathbb{Z}_p)$ היא משולשית עליונה (סופית, עבור n טבעי כלשהו) עם אחדות על האלכסון. הסבירו למה כפל מטריצות עדין מוגדר כאן (זה חשוב שבכל שורה ובכל עמודה יש רק מספר סופי של איברים לא אפסיים), והסיקו שמתקבלת חבורה. הוכיחו שהסדר של כל איבר הוא חזקה של p וכדי להראות שהמרכז טריוויאלי העזרו בזהויות הבאות על מטריצות בלוקים סופיות:

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & M \\ 0 & I_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

שאלה 9. תהי G חבורה. נקרא לתת־חבורה של G נאותה אם היא מוכלת ממש ב-G.

א. הוכיחו ש-G אינה איחוד של שתי תת־חבורות נאותות. כלומר שאם $G = H \cup K$, אז $G = H$ או $G = K$.

ב. תנו דוגמה לחבורה מסדר 4 שהיא איחוד של שלוש תת־חבורות נאותות שלה.

ג. מעתה נניח כי G היא איחוד של שלוש תת־חבורות נאותות, $G = H_1 \cup H_2 \cup H_3$. הוכיחו כי חיתוך של כל שתיים מתת־החבורות שווה לחיתוך שלושתן $H_1 \cap H_2 \cap H_3$.

ד. הוכיחו כי לכל $x \in G$ מתקיים $x^2 \in H_1 \cap H_2 \cap H_3$.

ה. הסיקו כי $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \lhd G$.

ו. הוכיחו שהאינדקס של החיתוך ב-G הוא 4. הראו שחבורת המנה ביחס לחיתוך איזומורפית לדוגמה שנתתם בסעיף השני.

בהצלחה!