מעבר על שאלות מתרגילי בית

תרגיל בית 1

שאלה 2

הרעיון הוא לעשות מאין "דו קרב", כל פעם לחלק את המערך ל2, עד שנשאר איבר אחרון. נוצר לנו מאין עץ של השוואות(כשהשורש הוא האיבר המקסימלי), ואז אפשר לרדת בעץ כדי למצוא את האיבר השני הכי גדול.

שאלה 4

סעיף א

בעזרת חיפוש בינארי אפשר למצוא את האיבר הראשון שהאיבר אחריו קטן יותר.

סעיף ב

שוב, חיפוש בינארי כדי למצוא את המקטעים, ואז חיפוש בינארי בכל מקטע

שאלה 5

את הטענה פשוט להוכיח משיקולי ספירה:

x - איבר הרוב.

a - מספר הזוגות של פעמיים x

b - מספר הזוגות השונים

c - מספר הזוגות השונים מסוג לא x

$$b + x > \frac{n}{2} \Rightarrow b < \frac{n}{4} - c$$

$$2a + 2c > \frac{n}{2}$$

$$a > \frac{n}{4} - \frac{b}{2}$$

נשתמש בטענה באלגוריתם הפרד ומשול במערך - הטענה נשמרת כשמחלקים את המערך ל2, ולכן ניתן לעשות רקורסיה.

שאלה 3

נשתמש ברעיון של שיכון H.

נמצא את החציון ($O\left(n\right)$ באמצעות $select$) לפי עברית. לפי החציון נחלק את הרשימה לחצי. בכל חצי נמצא את החציון לפי אנגלית ונחלק לחצי, וכן הלאה.

זמן הבנייה:

$$T\left(n\right)=O\left(n\right)+2T\left(\frac{n}{2}\right)=O\left(n\log n\right)$$

כשרוצים לחפש מבצעים חיפוש בינארי, כאשר בכל שלב, אם מחפשים על מערך שחצוי לפי השפה שלנו אז זה לא בעיה לבחור חצי, ואם הוא חצוי לפי השפה השנייה אז מבצעים חיפוש בשני החצאים. זמן חיפוש:

$$q_{H}\left(n\right)=O\left(1\right)+2q_{H}\left(\frac{n}{4}\right)=O\left(\sqrt{n}\right)$$

$$q_{E}\left(n\right)=2q_{H}\left(\frac{n}{2}\right)=O\left(\sqrt{n}\right)$$

תרגיל בית 2

שאלה 1

ממספרים את כל האיברים, ממיינים, וכל קבוצה (לפי הערכים המקוריים) ממיינים לפי המספור.

שאלה 2

נשתמש ב$Counting\ Sort$ כדי למיין לפי קבוצות, ואז שוב ב$Counting\ Sort$ כדי למיין כל קבוצה בפני עצמה.

שאלה 3

סעיף א

נעביר לבסיס n, ואז נעשה מיון בסיס ($Radix\ Sort$).

סעיף ב

שוב, נעביר לבסיס n ונעשה מיון בסיס. אמנם הפעם יש עד C ספרות - אבל C קבוע.

שאלה 4

סעיף a

נעשה מיון בסיס. נניח שיש x איברים - השלב הראשון יקח x זמן. את השלב השני נפעיל רק על x' המספרים שלהם יש 2 ספרות ומעלה(כי החד ספרתיים כבר ממויינים), ולכן זה יקח x' זמן. סה"כ $x + x' + ... = n$, ולכן החיפוש כולו יקח $O\left(n\right)$ זמן.

סעיף b

זו שאלה שונה - שכן מחרוזות באורך מסויים לא בהכרח באה לפני מחרוזות יותר ארוכות.

נספור כמה אותיות יש בכל מחרוזת. נבנה מערך באורך לכל היותר n, שמחזיק רשימות מקושרות של המחרוזות בכל אורך.

נמיין במיון בסיס כל תא במערך בפני עצמו. לאחר מכן נבצע מיזוג(כמו במיון מיזוג) בין התאים, כאשר משתמשים בעובדה שכל תא ממויין כדי לא לבדוק את כל המחרוזות כל פעם.

החלוקה למערך לוקחת $O\left(n\right)$ זמן. מיון כל תא בנפרד לוקח $O\left(n\right)$(לכל התאים). המיזוג לוקח $O\left(n\right)$ - סה"כ $O\left(n\right)$.

שאלה 5

נחלק את הדלי לחלקים לא שווים - החלק הi יהיה בגודל $\frac{1}{2^i}$

תרגיל בית 3

הערה

כשמבקשים נוסחא רקורסיבית בשאלה על תכנות דינמי - <u>לא לתת אלגוריתם רקורסיבי</u>. לא צריך אלגוריתם ממש עם ifים וforים - אלא רק נוסחא מתמטית.

שאלה 2

$CLCS\left(i,j,k\right)$

תת סדרה משותפת של $t_1,...t_i$ ו$s_1,...s_j$ תחת האילוץ $r_1,...r_k$

$$CLCS\left(i,j,k\right)=\begin{cases} ☹ & k>0\wedge\left(i=0\vee j=0\right)\\ 0 & k=i=j=0\\ CLCS\left(i-1,j-1,k-1\right)+1 & t_i=s_j=r_k\\ \max\left(CLCS\left(i-1,j,k\right),CLSC\left(i,j-1,k\right)\right) & t_i\neq s_j\\ CLCS\left(i-1,j-1,k\right)+1 & t_i=s_j\neq r_k \end{cases}$$

נממש על ידי מערך תלת מימדי - למרות שאפשר לחלק אותו לשכבות(לפי i או j) וכל שכבה לבסס על השכבה הקודמת, וכך לחסוך מקום.

שאלה 3

נניח שהקלט ממוין ושהמספרים שונים. נסתכל על מקום מסויים במערך - s_i. רוצים לדעת אם יש שיכון של תחנות דלק שמתחיל ב0 ומסתיים בs_i ומכיל את שניהם. בשביל זה צריך שתהיה נקודה s_j כך ש$15 \leq s_i - s_j \leq 25$ ויש שיכון של תחנות דלק מ0 עד s_j - ויש בסה"כ $O\left(1\right)$ מקומות כאלה לבדוק.(עד 15 מקומות אחורה)
$f\left(i\right)$ - האם ניתן לשכן את $s_0, ...s_i$ בצורה חוקית?

$$f\left(i\right)=\begin{cases}1 & i=0\\ \bigvee_{j=1}^{15}f\left(i-j\right) & \left(15\leq s_i-s_{i-j}\leq25\right)\end{cases}$$

תרגיל בית 6

שאלה 1

$$A\left(x\right)=\left(x-a_0\right)\left(x-a_1\right)\left(x-a_2\right)\cdots\left(x-a_{n-1}\right)$$

הכפלה ישירה תיקח $\sum\limits_{i=1}^{n-1}i=o\left(n^2\right)$. התבקשנו להכפיל ב$O\left(n\log^2 n\right)$.

אם נחלק את גורמי הפולינום לחצי, נקבל שני פולינומים בדרגה $\frac{n}{2}$ כל אחד, והכ-פלתם אחד בשני תיקח $\frac{n}{2}\log\frac{n}{2}$ - וכך נמשיך ברקורסיה.

שאלה 2

סעיף א

נרשום רק את העמודה הראשונה והשורה הראשונה.

סעיף ב

נרשום את המטריצה(שורה ועמודה ראשונה, עם איבר משותף) בתור פולינום ונכפיל.

שאלה 3

נחלק את הפולינום בדרגה n ל$\frac{n}{m}$ חלקים בגודל $2m$(החלקים חופפים) ונכפיל כל אחד מהם בm.

תרגיל בית 7

שאלה 1

סעיף א

התשובה היא $k=2$, ההוכחה פשוטה.

סעיף ב

נצבע ב2 צבעים, נניח בשלילה שיש מעגל אי זוגי, ונראה שהוא שובר את החוקיות.

סעיף ג

נתחיל מקודקוד אחד ונריץ ממנו DFS(או BFS) כדי לצבוע בשני צבעים. אם הגענו לסתירה - הגרף אינו דו"צ.

שאלה 2

נשתמש במשפט המסלול הלבן

שאלה 3

נבצע מיון טופולוגי, ואז זו לא בעיה לספור את המסלולים.

שאלה 4

ניתן להוכיח שמקודקוד מסויים השניים הכי רחוקים הם קצוות הקוטר.

שאלה 5

סעיף א

נבצע מיון טופולוגי

סעיף ב

בשורה הראשונה ישבו כל אלו שלהם דרגת כניסה 0. אחרי זה נסיר אותם מהגרף, ובשורה השנייה ישבו כל אלו עם דרגת כניסה 0(לאחר ההסרה) וכן הלאה.