

12.09.05

אוניברסיטת בר-אילן
 מבחן בקורס: אלגברה מופשטת 1 (סמסטר קיץ)
 מס': 88-211-05 + 88-211-07
 מרצה: פרופ' מיכאל מגרל
 תאריך: 14.09.05 מועד א'
 חומר עזר: רק מחשבון
 משך המבחן: שעתיים

השאלות:

5 מתוך 6

1. (חבורת Heisenberg)
 מעל קבוצה $H := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ נגדיר פעולה
 $(x_1, x_2, x_3) \bullet (y_1, y_2, y_3) := (x_1 + y_1 + x_3 y_2, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$
 א. הוכח ש (H, \bullet) חבורה לא קומוטטיבית.
 ב. הוכח שהיא איזומורפית לחבורת מטריצות הבאה (לגבי הכפל):

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

- ג. מצא קומוטנט של (H, \bullet) (ז"א מצא ת"ח הנגזרת H' הנוצרת ע"י קומוטטורים
 $[u, v] := uvu^{-1}v^{-1}$ $u, v \in H$).
 ד. (שאלת הבונוס) האם (H, \bullet) פתירה?

2. א. תהי $D_4 = \langle a, \sigma \rangle$ חבורה דיהדרלית. נסמן:

$$K = \{e, \sigma a\}, \quad H = \{e, \sigma a, a^2, \sigma a^3\}$$

- ה. ת"ח נורמלית ב- D_4 , K ת"ח נורמלית של H אבל K לא נורמלית ב- D_4 .
 ב. הוכח שאם $K \leq H \triangleleft G$ ו- H ציקלית סופית אז $K \triangleleft G$.

3. א. מצא סדר זוגיות של $\alpha^{-1}\beta^{10}\alpha$ ב- S_{100} אם
 $\alpha = (7,10)(7,2)(9,7,15)(7,12)$, $\beta = (2,7,10,11)$
 ב. באמצעות משפט Euler מצא 2 ספרות אחרונות של המספר 1959^{2005} .
 ג. (שאלת הבונוס) כמה איברים מסדר 2 יש בחבורה A_6 ?

4. א. הוכח משפט האיזומורפיזם הראשון.
 ב. הוכח או הפרך: $\mathbb{Z}_{1000} \cong \Omega_{20} \times \Omega_{50}$, $\mathbb{R}^* / \mathbb{R}_+ \cong \mathbb{Z}_2$, $R^2 / Z^2 \cong T^2$,
 (כאשר $T := \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\|=1\}$).
- ג. (שאלת הבנוס) תאר תמונות אפימורפיות של החבורות $S_3, \langle cis\sqrt{7}\pi \rangle$.
5. א. הוכח משפט Burnside על חישוב של מספר מסלולים.
 ב. מצא מספר ריבועים שונים עד כדי סיבובים ושיקופים (עד כדי D_4) אשר מתקבלים מריבוע נתון אם מותר לצבוע צלעות ב 2 צבעים קבועים.
6. א. הוכח שלכל חבורה עם 343 אלמנטים יש מרכז לא טריוויאלי (לנמק היטב).
 ב. בשאלות הבאות לנמק את תשובתכם (תנו דוגמה נגדית אם צריך):
 כל חבורה עם 20 איברים לא פשוטה.
 כל חבורה עם 187 אלמנטים לא פשוטה.
 כל חבורה עם 20 איברים ציקלית.
 כל חבורה עם 187 איברים ציקלית.
- ג. (שאלת הבנוס) הוכח שלכל חבורה G ולכל מספר שלם m לא שלילי קיימת קבוצה X ופעולה $\pi: G \times X \rightarrow X$ כך שלפעולה הזאת יש בדיוק m נקודות שבת.

בהצלחה ושנה טובה !

12.09.05