שיעורי בית 5

.

1. נתון $\phi : G_1 \to G_2$ הומומורפיזם בין חבורות. אברי היחידה הם בהתאמה: e_2 e_1. הוכיחו:
   (א) $\phi(e_1) = e_2$ [רמז: חשב $\phi(e_1e_1)$]
   (ב) $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$לכל $g \in G_1$.
   (ג) נגדיר את הגרעין של ϕ להיות $ker(\phi) = \{x \in G_1 | \phi(x) = e_2\}$. הוכיחו כי הגרעין הוא תת־חבורה של G_1 .
   (ד) נגדיר את התמונה של ϕ להיות$Im(\phi) = \{\phi(x) | \, x \in G_1\}$. הוכיחו כי התמונה היא תת־חבורה של G_2.

2. הגדרה: ההמופריזם $\phi : G_1 \to G_2$ המוגדר $\phi(g) = e_2$ לכל $g \in G_1$ נקרא ההומורפיזם הטריוויאלי.
   (א) מצאו הומומורפיזם לא טריוויאלי מהחבורה החיבורית $\mathbb{Z}_3$ לחבורת התמורות S_3 .
   (ב) הוכיחו שההומומורפיזם הטריוויאלי הוא ההומומורפיזם היחיד מ S_3 ל $\mathbb{Z}_3$.
   (ג) יהיו $n, m \in \mathbb{N}$ זרים, כלומר, שאין להם מחלק משותף פרט ל־1. הוכיחו שלא קיים הומומורפיזם לא טריוויאלי $\phi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$.

3. תהא G חבורה. נגדיר $Aut(G)$ להיות קבוצת כל ההומומורפיזם $\phi : G \to G$ ההפיכים (כלומר חח"ע ועל)
   (א) הוכיחו כי $Aut(G)$ חבורה ביחס לפעולת הרכבת פונקציות.
   (ב) נגדיר הומומורפיזם של חבורות

   $$\Phi : G \to Aut(G)$$

   ע"י $\Phi(x) = I_x$ כאשר I_x מוגדר להיות פונקציה ההצמדה. כלומר $\forall g \in G: \ I_x(g) = xgx^{-1}$.
   הוכיחו כי Φ הומומורפיזם (אין צורך להוכיח כי $I_x \in Aut(G)$) ומצאו $ker(\Phi)$.

4. כל החבורות בתרגיל זה מוגדרות עם פעולת כפל (וחבורת התמורות עם הרכבה).
   (א) נביט בהעתקה $\phi : (\mathbb{R} \backslash \{0\}) \to \{-1, 1\}$ המוגדרת על ידי $\phi(x) = \frac{x}{|x|} = sign(x)$. לדוגמה: $\phi(-3) = -1$ $\phi(3) = 1$. הוכיחו ש־ ϕ הומומורפיזם ומצאו את הגרעין.

(ב) ההעתקה $\phi : (\mathbb{C}\backslash\{0\}) \to \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ המוגדרת על ידי $\phi(a+ib) = a^2 + b^2$. (לדוגמה: $\phi(1+2i) = 5$), הוכיחו שהיא הומומורפיזם ומצאו את הגרעין . איזה צורה גיאומטרית יש לגרעין?

(ג) ההומומורפיזם $\phi : S_n \to \{-1, 1\}$ המוגדר על ידי $\phi(\sigma) = sign(\sigma)$. מצאו את הגרעין של ϕ.

5. הוכיחו שהחבורות הבאות לא איזומורפיות:

(א) $(\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$.

(ב) $(\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$.

(ג) $\mathbb{Z}_2 \times S_3, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$.

6. נסמן $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ונתבונן בחבורה $(P(A), \Delta)$ (קבוצת החזקה עם פעולת ההפרש הסימטרי). ראינו בתרגיל בית שזוהי חבורה.

(א) מצאו את סדרי האיברים ב־$P(A)$.

(ב) הוכיחו או הפריכו:

i. $P(A) \cong \mathbb{Z}_{16}$.

ii. $P(A) \cong (\mathbb{Z}_2)^4$.