שורות או עמודות

עוזי חרוש

תוכן העניינים

1 בדיקת אי-תלות **1**
1.1 שורות . . . 1
1.2 עמודות . . . 2

2 השלמה לבסיס **2**
2.1 שורות . . . 2
2.2 עמודות . . . 3

3 ומה עם פולינומים? **3**

הקובץ הזה נועד לענות על השאלה "לשים בעמודות או בשורות?" התשובה היא שאפשר לשים גם בשורות וגם בעמודות אבל חייבים להבין מה עושים!

1 בדיקת אי-תלות

תהי $\{v_1, \dots v_n\}$ קבוצה נרצה לבדוק האם היא בת"ל

1.1 שורות

ניתן לשבץ את הווקטורים כשורות במטריצה $\begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{pmatrix}$ ולדרג אותה, במידה ויש שורת אפסים הווקטורים ת"ל.

למה זה קורה? ברגע שאנחנו מדרגים את המטריצה אנחנו מחליפים שורה בצירוף של השורות, ומשמעות שורת אפסים היא שקיים צירוף לינארי שווה ל-0.

דוגמה. האם $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$ ת"ל

פתרון. נציב את וקטורים כשורות, נדרג את המטריצה, אבל הפעם נעקוב אחרי הווקטורים המקוריים

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 - 4v_1 \\ v_3 - 7v_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 - 4v_1 \\ v_3 - 7v_1 - 2(v_2 - 4v_1) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר קיבלנו ש-$v_3 - 7v_1 - 2(v_2 - 4v_1) = 0$ משמע יש צירוף לינארי לא טריוואלי שנותן 0 ולכן בקבוצה ת"ל.

1.2 עמודות

ניתן לשבץ את הווקטורים עמודה של מערכת הומוגנית $\left(\begin{array}{ccc|c} | & & | & | \\ v_1 & \cdots & v_n & 0 \\ | & & | & | \end{array}\right)$ ובמידה ויש פתרון לא טריוואלי הקבוצה ת"ל

למה זה קורה? הדבר נובע ישירות וההגדרה של אי-תלות, אני מעדיף את השיטה הזאת וכל הדוגמאות שנעשה בכיתה היו בדרך הזאת

דוגמה. האם $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right\}$ ת"ל

פתרון. אנחנו שואלים עבור אילו α,β,γ מתקיים $\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ המערכת הזאת מתוארת על ידי המשוואות

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

הפתרון הכללי של המערכת היא $\begin{pmatrix}t\\-2t\\t\end{pmatrix}$ במידה ונבחר $t=1$ נקבל ש- $1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ כלומר $v_1-2v_2+v_3=0$ בזהה לדוגמה קודמת! במקרה הזה הווקטורים של המשתנים החופשים תמיד ניתנים כצ"ל של המשתנים התלויים, לכן ניתן להוריד באופן אוטומטי את הווקטורים המקוריים של שמשתנים החופשיים, (ניתן לחשוב על זה גם כמציאת בסיס למרחב עמודה)

אני מעדיף את השיטה השנייה משתי סיבות:

1. ניתן לזהות את התלות לינארית בקלות על ידי הצבה הפתרון הכללי ומבלי צורך לעקוב אחרי הפעולות שנעשו
2. השיטה עובדת ישירות על ידי ההגדרה של אי תלות מה שגורם להבנה יותר טובה של המושג.

2 השלמה לבסיס

יהי $\{v_1,\dots v_{n-1}\}$ קבוצה ונרצה להוסיף ווקטור v_n כך ש-$\{v_1,\dots v_{n-1},v_n\}$ יהיה בסיס.
שתי השיטות מתבססות על חיפוש ווקטור $v_n\notin Span\{v_1,\dots,v_n\}$ גם כאן ניתן לבצע את זה בשורות ובעמודות.

2.1 שורות

ניתן לשבץ את בווקטורים כשורות במטריצה $A=\begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_{n-1} & - \end{pmatrix}$ ואז $Span\{v_1,\dots,v_n\}=R(A)$ כיוון שמרחב השורות אינו משתנה בדירוג, נדרג את המטריצה. הווקטור $e_i=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$ כאשר i היא העמודה של המשתנה החופשי יהיה הווקטור הדרוש להשלמת הבסיס.

דוגמה. השלימו את $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$ כך שיהיה בסיס ל-$\mathbb{R}^3$

פתרון. נציב את ווקטורים כשורות, ונדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

בעמודה שלישית אין איבר מוביל לכן ניתן להוסיף את הווקטור $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.2 עמודות

נעביר את התת מרחב מהצגה של $Span$ להצגה של משוואות ואז נבחר ווקטור שלא מקיים את המשוואות ונקבל ווקטור שלא שייך ל-$Span$

דוגמה. השלימו את $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ כך שיהיה בסיס ל-$\mathbb{R}^3$.

פתרון. נציב את ווקטורים כשורות, ונדרג את המטריצה

$$\begin{aligned} sp\{v_1, v_2\} &= \\ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \exists \alpha, \beta : \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 2 & z \end{array} \right) \right\} &= \\ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \exists \alpha, \beta : \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-x-y \end{array} \right) \right\} &= \\ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| z-x-y=0 \right\} & \end{aligned}$$

נבחר ווקטור שלא מקיים את התנאי למשל $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3 ומה עם פולינומים?

בנושא הזה אין באמת הבדל בין פולינומים מטריצות ווקטורים, כלומר בהיתן בעיה המרחב הפולנומים $\{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n\}$ ניתן לתרגם את הבעיה למרחב $\mathbb{R}^{n+1}$ על ידי התבוננות בווקטור המקדמים $\left\{ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\}$

תרגיל. השלימו את $\{1+x^2, 1+x+2x^2\}$ כך שיהיה בסיס ל-$\mathbb{R}_2[x]$.

פתרון. נתרגם את הפולינומים לווקטורים ב-$\mathbb{R}^3$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow 1+x^2$ ו-$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \leftarrow 1+x+2x^2$, כעת אנחנו צריכים להשלים לבסיס את $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, את הבעיה הנל ניתן לבצע בעמודות או בשורות, וכמו שמצאנו בווקטור הנדרש הוא $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, רק לא לשכוח לתרגם אותו בחזרה לפולינומים $x^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ לכן $\{1+x^2, 1+x+2x^2, x^2\}$.

כדי לבדוק את הנושאים הללו אפשר גם להמיר מטריצות ווקטורים באופן דומה על ידי "שירשור עמודות"

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a \\ d \\ g \\ b \\ e \\ h \\ c \\ f \\ i \end{pmatrix}$$

או על ידי שירשור שורות

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \end{pmatrix}$$

רק לא לשכוח לחזור למונחים של מטריצות.