פתרון תרגיל 8

21 בינואר 2019

1. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

(א) $2y'' - 5y' + 2y = 0$.

(ב) $9y'' + 6y' + y = e^{2x}$.

(ג) $y'' - 8y' + 7y = 0$

(ד) $y'' - 2y' + 10y = 0$

(ה) $y'' + 10y = 2x$

(ו) $4y'' + 4y' + y = 0$

<u>פתרון:</u>

א. המשוואה האופיינית היא:

$$0 = 2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = (2\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

השורשים הם $\lambda = 2, \frac{1}{2}$, שניהם ממשיים שונים, לכן הפתרון הוא:

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{2x}$$

ב. המשוואה האופיינית היא:

$$0 = 9\lambda^2 + 6\lambda + 1 = (3\lambda + 1)^2$$

השורש הוא $\lambda = -\frac{1}{3}$, הוא יחיד. לכן הפתרון הוא:

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{3}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{3}x}$$

ג. המשוואה האופיינית היא:

$$0 = \lambda^2 - 8\lambda + 7 = (\lambda - 7)(\lambda - 1)$$

השורשים הם $\alpha_1 = 7, \alpha_2 = 1$. לכן הפתרון הוא:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{7x}$$

ד. המשוואה האופיינית היא:

$$0 = \lambda^2 - 2\lambda + 10$$

השורשים הם: $\alpha = 2 \pm 3i$. לכן הפתרון הוא:

$$y = C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x$$

ה. המשוואה האופיינית היא:

$$\lambda^2 + 10 = 0$$

השורשים הם:$\alpha = \pm\sqrt{10}i$ ולכן הפתרון הוא:

$$y = C_1 \cos \sqrt{10}x + C_2 \sin \sqrt{10}x$$

ו. המשוואה האופיינית היא:

$$0 = \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = (\lambda + \frac{1}{2})^2$$

יש רק שורש אחד: $\alpha = -\frac{1}{2}$ ולכן הפתרון הוא:

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x}$$

2. פתרו את המד"ר הבאות:

(א) $y' = \frac{1}{\sin y}$

פתרון:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin y}$$
$$\sin y dy = dx$$
$$\int \sin y dy = \int dx$$
$$-\cos y = x + c$$
$$y = \arccos(-x - c)$$

אין פתרונות סינגולריים.

(ב) $y' = 3y^2 \cos x$

פתרון:

פתרונות סינגולריים: $y(x) = 0$.

פתרון כללי: $\frac{dy}{dx} = 3y^2 \cos x$

$$\frac{dy}{3y^2} = \cos x dx$$

$$\int \frac{dy}{3y^2} = \int \cos x dx$$

$$\frac{-1}{3y} = \sin x + c$$

$$y = \frac{-1}{3\sin x + 3c}$$

(ג) $y' = \frac{x}{y}$

<u>פתרון:</u>

פתרונות סינגולריים: אין.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$ydy = xdx$$

$$\int ydy = \int xdx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$y^2 = x^2 + 2c$$

יש שני פתרונות כלליים, שכל אחד מהם נמצא בתחום אחר של המישור: $y = \sqrt{x^2+2c}$ נמצא בתחום $y > 0$. ו־ $y = -\sqrt{x^2+2c}$ נמצא בתחום $y < 0$.

(ד) $y' = \frac{5x+1}{2y^2x}$

<u>פתרון:</u>

זאת משוואה פרידה, ללא פתרונות סינגולריים.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5x+1}{2y^2x}$$

$$2y^2dy = (5 + \frac{1}{x})dx$$

$$\int 2y^2dy = \int (5 + \frac{1}{x})dx$$

$$\frac{2}{3}y^3 = 5x + \ln|x| + c$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{15x}{2} + \frac{3}{2}\ln|x| + \frac{3c}{2}}$$

3. מצאו פתרון פרטי של המד"ר עם תנאי התחלה:

(א)

$$\begin{cases} y'' - 8y' + 7y = 14x^2 - 4x + 3 \\ y(0) = 5 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

(ב)

$$\begin{cases} 2y'' - 5y' + 2y = e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y(2) = 2 \end{cases}$$

(ג)

$$\begin{cases} y'' - 4y' = x^2 - x + 1 \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

(ד)

$$\begin{cases} y' = x^3(y-3)^2 \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

(ה)

$$\begin{cases} y' = x^3(y-3)^2 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

<u>פתרון:</u>

א. החלק ההומוגני מתאים למד"ר משאלה 1 סעיף ג. הפתרון הכללי של ההומוגנית הוא

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{7x}$$

נמצא פתרון פרטי, ע"י ניחוש:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y' = 2ax + b$$

$$y'' = 2a$$

נציב במד"ר:

$$2a - 8(2ax + b) + 7(ax^2 + bx + c) = 14x^2 - 4x + 3$$

$$7ax^2 + (7b - 16a)x + 2a - 8b + 7c = 14x^2 - 4x + 3$$

נעשה השוואת מקדמים, ונקבל:

$$7a = 14$$

$$a = 2$$

$$7b - 16 \cdot 2 = -4$$

$$b = 4$$

$$2 \cdot 2 - 8 \cdot 4 + 7c = 3$$

$$c = \frac{31}{7}$$

כלומר פתרון פרטי של המד"ר הוא:

$$y_p = 2x^2 + 4x + \frac{31}{7}$$

ולכן הפתרון הכללי של המד"ר הוא:

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{7x} + 2x^2 + 4x + \frac{31}{7}$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} 5 = c_1 + c_2 + \frac{31}{7} \\ 1 = c_1 e + c_2 e^7 + 2 + 4 + \frac{31}{7} \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נציב $c_2 = 5 - \frac{31}{7} - c_1$ ונקבל:

$$1 = c_1 e + e^7 (5 - \frac{31}{7} - c_1) + 6 + \frac{31}{7}$$

$$c_1 (e - e^7) = -5 - \frac{31}{7} + e^7 (-5 + \frac{31}{7})$$

$$c_1 = \frac{-5 - \frac{31}{7} + e^7 (-5 + \frac{31}{7})}{e - e^7}$$

$$c_2 = 5 - \frac{31}{7} - \frac{-5 - \frac{31}{7} + e^7 (-5 + \frac{31}{7})}{e - e^7}$$

ב. החלק ההומוגני מתאים למד"ר משאלה 1 סעיף א. ולכן נקבל:

$$y_h = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{2x}$$

2 הוא שורש של המשוואה האופיינית, לכן נמצא פתרון פרטי, ע"י ניחוש:

$$y = axe^{2x}$$

$$y' = ae^{2x} + 2axe^{2x} = (a + 2ax)e^{2x}$$

$$y'' = 2ae^{2x} + 2(a + 2ax)e^{2x} = (4a + 4ax)e^{2x}$$

נציב במד"ר:

$$2(4a + 4ax)e^{2x} - 5(a + 2ax)e^{2x} + 2axe^{2x} = e^{2x}$$

$$8a + 8ax - 5a - 10ax + 2ax = 1$$

$$3a = 1$$

$$a = \frac{1}{3}$$

כלומר:

$$y_p = \frac{1}{3}xe^{2x}$$

ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = y_h + y_p = c_1e^{\frac{1}{2}x} + c_2e^{2x} + \frac{1}{3}xe^{2x}$$

נמצא את הקבועים ע"י תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 2 = c_1e + c_2e^4 + \frac{2}{3}e^4 \end{cases}$$

נציב מהמשוואה הראשונה $c_2 = -c_1$ ונקבל:

$$2 = ec_1 - e^4c_1 + \frac{2}{3}e^4$$

$$c_1(e - e^4) = 2 - \frac{2}{3}e^4$$

$$c_1 = \frac{2 - \frac{2}{3}e^4}{e - e^4}$$

$$c_2 = -\frac{2 - \frac{2}{3}e^4}{e - e^4}$$

ג. המשוואה האופיינת למד"ר ההומוגנית היא:

$$\lambda^2 - 4\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 4) = 0$$

ולכן פתרון ההומוגנית הוא:

$$y_h = c_1e^{0x} + c_2e^{4x} = c_1 + c_2e^{4x}$$

כיון שאין במד"ר y, נמצא פתרון פרטי ע"י ניחוש:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$y'' = 6ax + 2b$$

נציב במד"ר:

$$6ax + 2b - 4(3ax^2 + 2bx + c) = x^2 - x + 1$$

$$-12ax^2 + (6a + 2b)x + 2b - 4c = x^2 - x + 1$$

נעשה השוואת מקדמים:

$$-12a = 1$$

$$a = -\frac{1}{12}$$

$$-\frac{6}{12} + 2b = -1$$

$$b = -\frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{2} - 4c = 1$$

$$c = -\frac{3}{8}$$

ונקבל:

$$y_p = -\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x$$

ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = c_1 + c_2 e^{4x} - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x$$

נמצא את הקבועים בעזרת תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 \\ 0 = c_1 + e^4 c_2 - \frac{1}{12} - \frac{1}{4} - \frac{3}{8} \end{cases}$$

נציב מהמשוואה הראשונה $c_2 = 1 - c_1$ ונקבל:

$$0 = c_1 + e^4(1 - c_1) - \frac{17}{24}$$

$$c_1(1 - e^4) = \frac{17}{24} - e^4$$

$$c_1 = \frac{\frac{17}{24} - e^4}{1 - e^4} = \frac{17 - 24e^4}{24 - 24e^4}$$

$$c_2 = 1 - \frac{17 - 24e^4}{24 - 24e^4}$$

ד. זו מד"ר פרידה.
פתרונות סינגולריים: $y = 3$.
פתרונות רגילים:

$$\frac{dy}{dx} = x^3(y-3)^2$$

$$\frac{dy}{(y-3)^2} = x^3 dx$$

$$\int \frac{dy}{(y-3)^2} = \int x^3 dx$$

$$-\frac{1}{y-3} = \frac{x^4}{4} + c = \frac{x^4 + 4c}{4} = \frac{x^4 + c}{4}$$

(כי $4c$ זה כמו קבוע חדש c). ולכן:

$$y = 3 - \frac{4}{x^4 + c}$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$4 = 3 - \frac{4}{c}$$

$$c = -4$$

ה. זו אותה משוואה, אבל כאן תנאי ההתחלה הוא בפתרון הסינגולרי, ולכן הפתרון הוא הסינגולרי: $y = 3$.