

# חשבון אנליטי (0321-1833)

מבחן לדוגמא, סמ' א, תש"ע

פרופ' י. אהרונסון

זמן המבחן: שלש שעות.

ענה על שאלה מס' 1 ועל עוד ארבע שאלות בלבד ללא כל שימוש בחומר עזר. הוכח את תשובותיך. סמן את מספרי שאלות עליהן ענית על מחברת מס' I.

1. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

- (א) (5 נק') אם  $A, B \subset \mathbb{R}$  קטעים ו- $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות יורדות, אזי גם  $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$  הינה פונקציה יורדת.  
(ב) (5 נק')  $(1 + \frac{1}{n^2})^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$  כ- $n \rightarrow \infty$ .  
(ג) (5 נק')  $e^{-\frac{1}{x^3}} \rightarrow 0$  כ- $x \rightarrow 0, x < 0$ .  
(ד) (5 נק') אם  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה, אזי קיים  $x \in [0, 1]$  כך ש- $f(x) = 0$ .

2. (20 נק')

- (א) מצא פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1} = f(x)$  עבור  $x \in \mathbb{R}$ .  
(ב) הוכח כי אם  $b_n > 0$  עבור  $n \in \mathbb{N}$  ו- $b_n \rightarrow r > 1$  אזי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_1 b_2 \dots b_n} < \infty$ .

3. (20 נק')

- (א) הוכח כי אם  $0 < x < 1$ , אזי  $x < x(2-x) < 1$ .

עבור  $x \in \mathbb{R}$ , נגדיר את הסידרה  $a_1(x), a_2(x), \dots$  ע"י  $a_1(x) = x$  ו- $a_{n+1}(x) := a_n(x)(2 - a_n(x))$ .

(ב) יהיה  $x \in (0, 1)$ . הוכח כי קיים הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x)$  והשב אותו.

האם קיימים הגבולות:

(ג)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(\frac{4}{3}) \in \mathbb{R}$  ?

(ד)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(4) \in \mathbb{R}$  ?

4. (20 נק')

- (א) הוכח כי קיים הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ .  
(ב) הוכח כי  $\int_0^{\infty} e^{-t^3} dt < \infty$ .

5. (20 נק')

- (א) מצא את רדיוס ההתכנסות של טור החזקות  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$ .  
(ב) בדוק התכנסות של הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + n}{4^n}$ .

6. (20 נק')

יהיה  $f(x) := \frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1}$  עבור  $x > 0, x \neq 1$ .

(א) מצא  $f(1)$  כך ש- $f$  תהיה רציפה ב-1.

(ב) האם  $f$  כפי שמוגדר בסעיף א' הינה גזירה ב-1?

**בהצלחה!!!**