תרגיל 2 - פתרונות

.1

$r < R \quad E = 0$

$r > R$

$$\oint \bar{E} \cdot \bar{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E(2\pi rh) = \frac{Qh}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{2\pi r\varepsilon_0}$$

.2

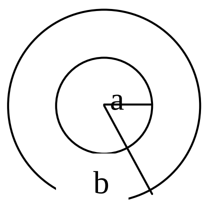
א. כאשר מטען Q מונח במרכז הקובייה, השטף יהיה זהה דרך כל אחת מפאות הקובייה (מטעמי סימטרייה). לכן השטף דרך אחת מפאות הקובייה יהיה שישית מהשטף הכללי של המטען. ע"פ חוק גאוס נקבל שהשטף הכללי מיוצא ממטען הוא: $\Phi_{cube} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$, לכן השטף דרך אחת הפיאות יהיה:

$$\Phi_{side} = \frac{Q}{6\varepsilon_0}$$

ב. כאשר מטען Q מונח בפאת הקובייה, רק שמינית מהשטף נכנס לקובייה. שלוש מתוך ששת פאות הקובייה לא מרגישות שטף כלל בגלל שקווי השטף מקבילים לפאות אלו. שלוש הפאות האחרות יחלקו את שמינית השטף, ולכן כל אחת מהן תרגיש שטף של:

$$\Phi_{side} = \frac{Q}{24\varepsilon_0}$$

.3



$r < a \quad E = 0$

$a < r < b \quad E = \frac{kQ}{r^2}$

$r > b \qquad E = \frac{kQ}{r^2} + \frac{k(-Q)}{r^2} = 0$

.4

: <u>r<R</u>

$$E*4\pi r^2=4\pi k\int_0^r 4\pi r^2\rho dr \rightarrow \rho(r)=\rho_0(1-\frac{r^2}{R^2})$$

$$\vec{E}=\frac{4\pi k\rho_0}{r^2}\left[\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5R^2}\right]_0^r=4\pi k\rho_0\left(\frac{r}{3}-\frac{r^3}{5R^2}\right)$$

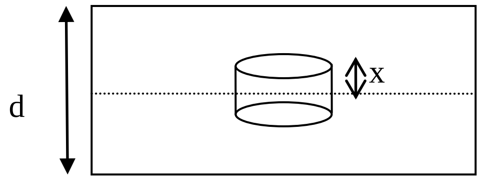
: <u>r>R</u>

$$E*4\pi r^2=4\pi k\int_0^R 4\pi r^2\rho dr \rightarrow \rho(r)=\rho_0(1-\frac{r^2}{R^2})$$

$$\vec{E}=\frac{4\pi k\rho_0}{r^2}\left[\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5R^2}\right]_0^R=\frac{4\pi k\rho_0}{r^2}\left(\frac{R^3}{3}-\frac{R^3}{5}\right)=\frac{8\pi k\rho_0 R^3}{15r^2}\hat{r}$$

.5 <u>לפי חוק גאוס</u>

<u>x < d</u>

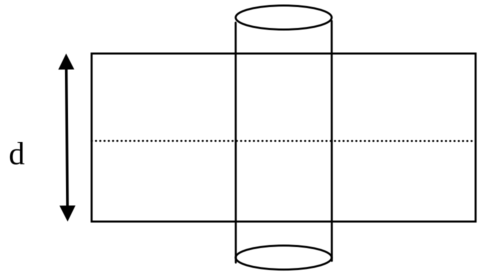


$$\oint E\cdot dS=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$2ES=\frac{S2x\rho}{\varepsilon_0}$$

$$E=\frac{\rho x}{\varepsilon_0}$$

<u>x > d</u>



$$\oint E\cdot dS=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$2ES=\frac{Sd\rho}{\varepsilon_0}$$

$$E=\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$$

לפי <u>עיקרון של סופרפוזיציה</u>: נחשב שדה שיוצרת שכבה בעלות עובי dx ונסכום תרומות של כל השכבות.

$$\oint E \cdot dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$2ES = \frac{\rho S dx}{\varepsilon_0}$$

$$dE = \frac{\rho dx}{2\varepsilon_0}$$

$$r < d$$

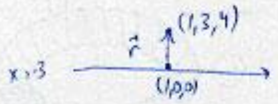
$$E = 2\int_0^x \frac{\rho dx}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}$$

$$r > d$$

$$E = 2\int_0^{d/2} \frac{\rho dx}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$$

.6

[illegible] $\vec{E} = \frac{2k\lambda}{r}\hat{r} = \frac{2k\lambda}{r^2}\vec{r}$



[illegible] (1,3,4) [illegible] $|(0,3,4)| = \sqrt{25}$

[illegible] x

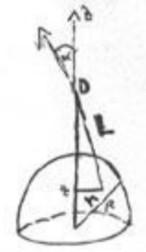
[illegible]

$$E_1 = 2k\lambda \cdot \frac{1}{25}(0,3,4)$$

$$E_2 = 2k\lambda \cdot \frac{1}{17}(1,0,4)$$ [illegible] y

$$E_3 = 2k\lambda \cdot \frac{1}{10}(1,3,0)$$

$$\vec{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 2k\lambda\left[\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{10}\right)\hat{x} + \left(\frac{3}{25}+\frac{3}{10}\right)\hat{y} + \left(\frac{4}{25}+\frac{4}{17}\right)\hat{z}\right]$$



7

$$dE_z = \frac{k\,dq}{L^2}\cos\alpha = \frac{k\rho\, r\,dr\,d\theta\,dz}{r^2+(D-z)^2}\,\frac{(D-z)}{(r^2+(D-z)^2)^{1/2}}$$

נרשום את גבול הרדיוס התלוי ב z:

$$r^2_{max}(z) = R^2 - z^2$$

$$E_z = k\rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{(R^2-z^2)^{1/2}} \frac{r(D-z)}{[r^2+(D-z)^2]^{3/2}}\,dr\,d\theta\,dz \qquad \Big/ \int d\theta$$

$$= 2\pi k\rho \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{r(D-z)}{[r^2+(D-z)^2]^{3/2}}\,dr\,dz \qquad \Big/ \int dr$$

$$= 2\pi k\rho \int_0^R (D-z)\left[\frac{-1}{[r^2+(D-z)^2]^{1/2}}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{R^2-z^2}} dz$$

$$= 2\pi k\rho \int_0^R (D-z)\left[\frac{-1}{(R^2+D^2-2Dz)^{1/2}} + \frac{1}{(D-z)}\right] dz$$

החלפת משתנים:

$$\hat{z} = D-z \quad , \quad \dot{z} = D-\hat{z}$$

$$dz = d\hat{z}$$

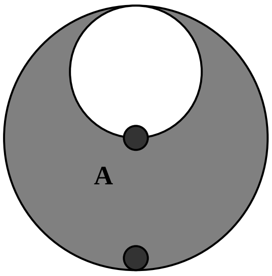
$$R \to D-R \quad , \quad 0 \to D$$

$$= 2\pi k\rho \int_D^{D-R} \left[\frac{z}{(2Dz+R^2-D^2)^{1/2}} - 1\right] dz$$

$$= 2\pi k\rho \left[\frac{1}{6D^2}(2Dz - 2R^2 + 2D^2)\sqrt{2Dz+R^2-D^2} - z\right]_D^{D-R}$$

$$= 2\pi k\rho \left\{\frac{1}{3D^2}\left[(2D^2 - DR - R^2)(D-R) - (2D^2-R^2)(D^2+R^2)^{1/2}\right] + R\right\}\hat{z}$$

8 נפתור את השאלה בעזרת עקרון של סופרפוזיציה: $E_{tot}=E_a+E_{\frac{a}{2}}$



בנקודה A:

$$E_a=0$$

$$E_{\frac{a}{2}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{-\rho\left(\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3\right)}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{a}{2}\right)^2}=-\frac{\rho a}{6\varepsilon_0}$$

$$E_{tot}=0-\frac{\rho a}{6\varepsilon_0}=-\frac{\rho a}{6\varepsilon_0}$$

בנקודה B

$$E_a=\frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)}{4\pi\varepsilon_0 a^2}=\frac{\rho a}{3\varepsilon_0}$$

$$E_{\frac{a}{2}}=\frac{-\rho\left(\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3\right)}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{3a}{2}\right)^2}=-\frac{\rho a}{54\varepsilon_0}$$

$$E_{tot}=\frac{\rho a}{3\varepsilon_0}-\frac{\rho a}{54\varepsilon_0}=-\frac{17\rho a}{54\varepsilon_0}$$