תרגיל בית 13 אינפי 1 למדמ"ח - לא להגשה

1. האם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט/מתכנסים בתנאי/מתבדרים?

(א) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$

פיתרון:

נבדוק התכנסות בהחלט: נקבל את הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. נבדוק לפי מבחן העיבוי, את התכנסות הטור $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \ln(2^n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(2^n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(2)} =$ $\frac{1}{\ln(2)} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$, שמתבדר כקבוע כפול הטור ההרמוני שמתבדר. לכן הטור שלנו לא מתכנס בהחלט.

התכנסות בתנאי:

נשים לב שהסדרה מונוטונית: $\frac{1}{n \ln n} > \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$, ומתקיים $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln n} = 0$, והטור הנתון מחליף סימן, ולכן לפי מבחן לייבניץ הטור מתכנס בתנאי.

(ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi n}+1}$

פיתרון:

קל לוודא ש

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}+1}$$

מונוטונית יורדת ומתכנסת ל 0. לכן, לפי מבחן לייבניץ הטור מתכנס בתנאי.

כעת נבדוק האם הטור עם ערך מוחלט מתכנס.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}+1}$$

נשים לב ש

$$\sqrt{\pi n}+1 \le 4\sqrt{n}$$

ולכן

$$\frac{1}{4\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{\pi n}+1}$$

היות ש

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\sqrt{n}}$$

הוא טור מתבדר, גם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi n}+1}$$

מתבדר. לסיכום: הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi n}+1}$$

מתכנס בתנאי ולא בהחלט.

(ג) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$

פיתרון:

נבדוק מבחן השוואה:

$$\frac{1}{\ln(n!)}\geq\frac{1}{\ln(n^n)}=\frac{1}{n\ln n}$$

וראינו בסעיף א שהטור הימני מתבדר (לפי מבחן העיבוי), ולכן הטור שלנו גם מתבדר.

(ד) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n}{\sqrt{n^4-3n^2}}$

פיתרון:

הטור שלנו הוא בעצם

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^n}{\sqrt{n^2-3}}$$

ברור כי $\frac{2}{\sqrt{n^2-3}}$היא סדרה מונוטונית יורדת המתכנסת ל 0. ולכן לפי לייבניץ הטור מתכנס. נבדוק התכנסות של הטור עם ערך מוחלט

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2-3}}$$

נשים לב ש

$$\sqrt{n^2-3}\leq\sqrt{n^2}=n$$

ולכן

$$\frac{1}{n}\leq\frac{1}{\sqrt{n^2-3}}$$

היות שהטור

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$$

מתבדר.גם הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-3}}$$

מתבדר. ולכן הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{\sqrt{n^4-3n^2}}$$

מתכנס בתנאי.

(ה) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{5777}}{(\ln \pi)^n}$

פיתרון:

נשים לב שהו טור חיובי. נשתמש במבחן קושי

$$\sqrt[n]{\frac{n^{5777}}{(\ln \pi)^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^{5777}}{\ln \pi} \to \frac{1}{\ln \pi} < 1$$

ולכן הטור מתכנס.

(ו) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)^n}{n!}$ עבור $a \in \mathbb{R}$

פיתרון:

נשים לב שאם $a=-1$ הטור בוודאי מתכנס בהחלט, לכן ניתן להניח ש $a \neq -1$ ולהשתמש במבחן דאלאמבר

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{\frac{|a+1|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a+1|^n}{n!}} = \frac{|a+1|}{n+1} \to 0$$

ולכן הטור מתכנס בהחלט.

(ז) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^n}$

פיתרון:

נשתמש במבחן קושי

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln \ln n)^n}} = \frac{1}{\ln \ln n} \to 0 < 1$$

ולכן הטור מתכנס.

(ח) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n-1)}$

פיתרון:

נבדוק אם הטור עם ערך מוחלט מתכנס. נשתמש במבחן ההשוואה: נשים לב ש:

$$2 \cdot n(n-1) = 2n^2 - 2n = n^2 + (n^2 - 2n) \overset{*}{\geq} n^2$$

כאשר ב־$*$ קל לראות שזה אכן קורה לכל $n \geq 2$ כי אז $n \cdot n \geq 2n$. ולכן נקבל:

$$\frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

ולפי מבחן ההשוואה הוא מתכנס. כלומר הטור מתכנס בהחלט.

(ט) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^3}{(3n)!}$

פיתרון:

נשתמש במבחן דאלאמבר

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{(n+1)!(n+1)!(n+1)!}{(3n+3)!}}{\frac{n!n!n!}{(3n)!}} = \frac{(n+1)(n+1)(n+1)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \to \frac{1}{27} < 1$$

ולכן הטור מתכנס בהחלט.

(י) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$

פיתרון:

נשים לב כי $a_n = \frac{1}{2^{\ln n}}$ היא סדרה חיובית מונוטונית יורדת ומתכנסת ל 0. לכן ניתן להשתמש במבחן העיבוי. כלומר הטור מתכנס אם ורק אם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{\ln 2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{n \ln 2}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-\ln 2)}$$

היות ש $1 - \ln 2 > 0$

$$2^{n(1-\ln 2)} \to \infty$$

וממילא הטור מתבדר.