שאלת אתגר 2 – 88-112 אלגברה לינארית 1
סמסטר א' תשע"ו

נובמבר 2015

בשאלה זו נוכיח שאם יש לנו מערכת של אינסוף משוואות לינאריות, היא שקולה למערכת עם מספר סופי של משוואות לינאריות. כלומר, כדי לפתור אינסוף משוואות לינאריות מספיק לפתור מספר סופי של משוואות מתוך האוסף (אבל חשוב לדעת לבחור אותן).

יהי $\mathbb{F}$ שדה. לאורך כל התרגיל נניח שאנו עובדים עם מספר סופי של משתנים, $x_1, \dots, x_n$. כלומר, כל מערכת משוואות בתרגיל הזה היא מערכת של משוואות כשהנעלמים הם $x_1, \dots, x_n$.

הערה 1 (הערה מקדימה, לצורך הבנה). גם אם יש שורת אפסים, זה לא אומר בהכרח שיש אינסוף פתרונות. למשל, למערכת

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש שורת אפסים ופתרון יחיד.

שאלה. נניח שיש לנו מערכת אינסופית של משוואות. ניקח מערכת של משוואות מתוך האוסף האינסופי שלנו

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_1 \end{cases}$$

כך שבצורה המדורגת של $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ אין שורות אפסים, ואם נוסיף עוד משוואה מהאוסף האינסופי למערכת שלנו – נקבל בצורה המדורגת החדשה שורת אפסים.

א. הסבירו מדוע בהכרח המערכת החדשה סופית.

ב. הוכיחו: אם קיים למערכת האינסופית פתרון, כל פתרון של המערכת הסופית הוא פתרון של המערכת האינסופית.

ג. נניח שלמערכת האינסופית אין פתרון. הוכיחו שצריך להוסיף משוואה אחת למערכת הסופית כדי שלמערכת הסופית החדשה לא יהיה פתרון.

ד. הסיקו: קיימת מערכת משוואות עם מספר סופי של משוואות, שאוסף פתרונותיה הוא אוסף הפתרונות של המערכת האינסופית.

הדרכה

א. הסתכלו על העמודות המובילות, כלומר על העמודות שיש בהן איבר מוביל, והראו שבהכרח $n \leq m$. כיוון ש-n סופי, זה יוכיח ש-m סופי.

ב. קחו פתרון של המערכת הסופית, והוכיחו שהוא פתרון של כל משוואה אחרת מהאוסף האינסופי, על ידי כך שתוסיפו אותו למערכת הסופית ותדרגו.

ג. אם למערכת האינסופית אין פתרון, הסבירו מדוע ניתן בהכרח להוסיף משוואה אחת למערכת שלנו כך שתתקבל שורת סתירה בצורה המדורגת קנונית.

ד. שלבו את סעיפים ב' ו-ג' יחד.