ליכסון או"ג

20 ביוני 2017

הגדרה: מטריצה $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ניתנת לליכסון או"ג אם קיימת מטריצה או"ג P (כלומר $P^t=P^{-1}$) המקיימת $P^tAP=D$ אלכסונית.

משפט: עבור A סימטרית מתקיים כי יש לה n ע"ע וו"ע של ע"ע שונים הם או"ג (ביחס למ"פ הסקלארית).

משפט: A ניתנת לליכסון או"ג אמ"מ A סימטרית.

איך מלכסנים או"ג? כמו ליכסון רגיל (בפרט P תהיה מורכבת מו"ע ו D מע"ע בהתאמה) עם השינוי הבא: בכל מרחב עצמי V_λ נבחר בסיס B_λ, נבצע גרם שמידט לקבל בסיס או"נ B'_λ וניקח משמה את הו"ע.

תרגיל: לכסן אורתוגונלית את המטריצה $A=\begin{pmatrix}22&-2&4\\-2&19&-2\\4&-2&22\end{pmatrix}$, מצא את Pאורתוגונלית ו־D אלכסונית המקיימת $D=P^{-1}AP$

פתרון:הפולינום האופייני של המטריצה הוא

$$P_A(\lambda)=\left|\lambda I-\begin{pmatrix}22&-2&4\\-2&19&-2\\4&-2&22\end{pmatrix}\right|=(\lambda-18)^2(\lambda-27)$$

המרחבים העצמים הם

- $\lambda=18$,

$$V_{\lambda=18}=N\left(\begin{pmatrix}4&-2&4\\-2&1&-2\\4&-2&4\end{pmatrix}\right)=Span\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$$

- $\lambda=27$

$$V_{\lambda=27}=N\left(\begin{pmatrix}-5&-2&4\\-2&-8&-2\\4&-2&-5\end{pmatrix}\right)=Span\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

כלומר אם היינו צריכים ליכסון רגיל אז המטריצה המלכסנת היתה פשוט

$$\begin{pmatrix}-1&1&2\\0&2&-1\\1&0&2\end{pmatrix}$$

ובנוסף נשים לב שווקטורים ממרחבים עצמיים שונים הם אורתוגונלים כלומר

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

לכן למעשה יש לבצע את גרם שמידט רק עבור המרחב העצמי $V_{\lambda=18}$

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ו־

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ולסיום צריך לנרמל את הווקטורים, וכעת יש לנו מטריצה אורתוגנלית $P = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{4.5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{4.5}} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{4.5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$
המקיימת

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

1. תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית שיש לה איבר חיובי על האלכון (כלומר קיים i כך ש $A_{i,i} > 0$). הוכיחו כי ל A יש ע"ע חיובי.
פתרון: נסמן $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ את הע"ע של A. כיוון ש A סימטרית קיימת P או"ג כך ש $P^tAP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ומכן ש $A = PDP^t = Q^tDQ$ (כאשר $Q = P^t$). כעת

$$0 < A_{i,i} = e_i^t A e_i = e_i^t Q^t D Q e_i \overset{v=Qe_i}{=} v^t D v = \sum_{i,j} D_{i,j} v_i v_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^2$$

ולכן קיים $0 < \lambda_i$ כנדרש.

2. תהא A סימטרית . נגדיר $B = A^2 - 6A + 11I$. האם B ניתנת ללכסון והאם B הפיכה?

פתרון ל A יש n ו"ע. כל ו"ע v עם λ ע"ע של A הוא ו"ע של B עם ע"ע $\lambda^2 - 6\lambda + 11$, בפרט ל B יש n ו"ע ולכן לכסינה. בנוסף, הע"ע של B הם $\lambda^2 - 6\lambda + 11$ עבור λ ע"ע של A. כיוון ש $\lambda^2 - 6\lambda + 11 \neq 0$ לכל $\lambda \in \mathbb{R}$ נקבל כי 0 אינו ע"ע של B ולכן B הפיכה.