<u>תזכורת:</u>

ניסחנו כמה טענות לא מובנות מאליהן על עוצמות.

1. עקרון הסכום: אם κ,λ עוצמות שלפחות אחת מהן אינסופית, אז: $\kappa+\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}$.
2. עקרון הכפל: אם κ,λ עוצמות שלפחות אחת מהן אינסופית ושונות מ־0, אז: $\kappa\cdot\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}$.
3. השוואת עוצמות – לכל שתי עוצמות κ,λ, מתקיים: $\lambda\le\kappa$ או $\kappa\le\lambda$.

אנו נוכיח את הטענות האלו. ראשית, נוכיח טענות מעט יותר בסיסיות במקום עקרונות הסכום והמכפלה – אם A אינסופית, אז:

$$|A|+|A|=|A|\cdot|A|=|A|$$

מטענות אלו אפשר להסיק את עקרונות הסכום והמכפלה כפי שהצגנו אותם. שנית, כדי להוכיח את הטענות האלו ואת הטענה על השוואת עוצמות נידרש ללמה של צורן. את הלמה לא נוכיח; אפשר להראות שהלמה של צורן שקולה לאקסיומת הבחירה.

בשביל הלמה, נחזור אחורה ליחסי סדר ונציג מושג חדש – שרשרת.

<u>שרשראות:</u>

תהי A קבוצה, ויהי R יחס סדר על A (אפשר לומר: (A,R) קס"ח). תת־קבוצה $B\subseteq A$ נקראת שרשרת, אם היחס עליה הוא מלא. פורמלית, היחס $R\cap(B\times B)$ (כלומר, לקחת מתוך R את הזוגות שמכילים איברים של B בלבד) הוא יחס סדר מלא על B.

למשל: נתבונן בקבוצה: $A=P(\{1,2,3\})$ עם יחס ההכלה. על A, זהו לא יחס מלא (למשל: $\{1\}\not\subseteq\{2\}\wedge\{2\}\not\subseteq\{1\}$). אם נתבונן בקבוצה: $B=\{\emptyset,\{3\},\{1,3\}\}$, נקבל שיחס ההכלה על B הוא מלא, ולכן B שרשרת.

נשים לב ש־B היא לא שרשרת מקסימלית – אפשר למצוא שרשרת גדולה יותר, שמכילה את B: $C=\{\emptyset,\{3\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$. C היא שרשרת מקסימלית – אין שרשרת שמכילה אותה.

באופן דומה, בקבוצה $P(\mathbb{N})$ עם יחס ההכלה, השרשרת: $C=\{\emptyset,\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\},\ldots\}$ היא מקסימלית – אין שרשרת שמכילה אותה.

כמובן, אם היחס R הוא כבר יחס מלא, אז כל תת־קבוצה היא שרשרת,

והקבוצה עצמה - A- היא השרשרת המקסימלית.
נדגיש - "מקסימלית" הכוונה מקסימלית ביחס להכלה, כלומר אין שרשרת אחרת שמכילה אותה.
דוגמה נוספת - $(\mathbb{N}, |)$, הטבעיים עם היחס "מחלק את". זה לא יחס מלא. על הקבוצה: $C = \{1, 4, 16, 64, \ldots\}$ היחס כן מלא ולכן C שרשרת. C לא מקסימלית - אפשר להוסיף חזקות של 2.

<u>הערה:</u>
אפשר גם להגדיר מושג של "אנטי־שרשרת" - קבוצת איברים שבה אף אחד לא מתייחס לשני. פורמלית, $B \subseteq A$ היא אנטי־שרשרת, אם לכל $a, b \in B$, $a \neq b$ מתקיים: $(a, b), (b, a) \notin R$. למשל, בקבוצה: $A = P(\{1, 2, 3\})$ עם יחס ההכלה, הקבוצה: $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ היא אנטי־שרשרת. זו אנטי־שרשרת מקסימלית - אם נוסיף אפילו איבר אחד מ־A, כבר יהיו איברים ב־B שיתייחסו זה לזה.
בהינתן (A, R) קס"ח, אפשר להגדיר את האורך של A כגודל השרשרת הגדולה ביותר, ואת הרוחב של A כגודל האנטי־שרשרת הגדולה ביותר. למשל, בקבוצה: $A = P(\{1, 2, 3\})$ עם יחס ההכלה, השרשרת הגדולה ביותר היא בגודל 4, למשל: $\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$. האנטי שרשרת הגדולה ביותר היא בגודל 3, למשל: $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$. לכן, האורך הוא 4 והרוחב הוא 3. אפשר לסמן:

$$L(A) = 4, W(A) = 3$$

באמצעות המושג של שרשרת, נוכל לנסח שני משפטים בסיסיים.

<u>עקרון המקסימום של האוסדורף:</u>
תהי (A, R) קס"ח. כל שרשרת מוכלת בשרשרת מקסימלית. ניסוח שקול: ב־A קיימת שרשרת מקסימלית.
לא נוכיח זאת.

<u>הלמה של צורן:</u>
תהי (A, R) קס"ח. אם לכל שרשרת $C \subseteq A$ יש חסם מלעיל, אז ב־A יש

איבר מקסימלי.

לא נוכיח את המשפט. כן נעיר כמה הערות:

1. אפשר להוכיח שהלמה של צורך שקולה לעקרון המקסימום של האוסדורף מצד אחד, ולאקסיומת הבחירה מצד שני. ביחד עם השערת הרצף המוכללת, נקבל (כבר) ארבעה משפטים ששקולים זה לזה ואחד מהם הוא אקסיומת הבחירה.
2. באמצעות הלמה של צורן, אפשר להוכיח שלכל מרחב וקטורי יש בסיס.

<u>טענה:</u>

תהיינה X,Y קבוצות. נתבונן בקבוצה הבאה: $T:\{(A,f)\,|A\subseteq X,\ f:A\to Y\quad injective\}$.
על T אפשר להגדיר יחס סדר $\leq$ כך:

$$(A_1,f_1)\leq(A_2,f_2)\iff A_1\subseteq A_2\wedge f_2|_{A_1}=f_1$$

למשל: $X=Y=\mathbb{N}$. נתבונן בקבוצות: $A_1=\{1,2\}\,,A_2=\{1,2,3,4\}$
ובפונקציות: $f_1:A_1\to Y$, $f_2:A_2\to Y$ המוגדרות ע"י:

$$f_1\left(1\right)=5,f_1\left(2\right)=4$$

$$f_2\left(1\right)=5,f_2\left(2\right)=4,f_2\left(3\right)=3,f_2\left(4\right)=10$$

f_1,f_2 חח"ע. לכן $(A_1,f_1)\,,(A_2,f_2)\in T$. כמו כן, $A_1\subseteq A_2$, ובנוסף לכך:
$f_2|_{A_1}=f_1$ ולכן: $(A_1,f_1)\leq(A_2,f_2)$.
זהו יחס סדר על T. הוכחה בסיכום.