Appendix lin alg

כפליות הסימן

משפט. תהיינה $\sigma, \tau \in S_n$. אזי:

$$\mathrm{sign}(\sigma\tau) = \mathrm{sign}(\sigma)\,\mathrm{sign}(\tau)$$

הוכחה. לפי ההגדרה:

$$\mathrm{sign}(\sigma\tau) = \prod_{1 \le i < j \le n} (\sigma\tau)_{i,j}$$

כאשר:

$$(\sigma\tau)_{i,j} = \begin{cases} 1 & , \sigma\tau(i) < \sigma\tau(j) \\ -1 & , \sigma\tau(i) > \sigma\tau(j) \end{cases}$$

אם $\tau(i) < \tau(j)$ אזי נקבל כי:

$$\text{I} \begin{cases} (\sigma\tau)_{i,j} = \sigma_{\tau(i),\tau(j)} \\ \tau_{i,j} = 1 \end{cases}$$

אם $\tau(i) > \tau(j)$ אזי נקבל כי:

$$\text{II} \begin{cases} (\sigma\tau)_{i,j} = -\sigma_{\tau(j),\tau(i)} \\ \tau \end{cases}$$

$\ldots_{i,j} = -1$

גבול:

$$\operatorname{sign}(\sigma\tau) = \prod_{1\le i<j\le n} (\sigma\tau)_{i,j} =$$

$$= \prod_{\substack{1\le i<j\le n \\ \tau(i)<\tau(j)}} (\sigma\tau)_{i,j} \cdot \prod_{\substack{1\le i<j\le n \\ \tau(i)>\tau(j)}} (\sigma\tau)_{i,j} \overset{\text{לפי: I, II}}{=}$$

$$= \prod_{\substack{1\le i<j\le n \\ \tau(i)<\tau(j)}} \overbrace{\sigma_{\tau(i),\tau(j)}}^{\mathrm{I}} \cdot \prod_{\substack{1\le i<j\le n \\ \tau(j)<\tau(i)}} \overbrace{-\sigma_{\tau(j),\tau(i)}}^{\mathrm{II}} =$$

כל זוג $k<l$ הוא מן הצורה: $k=\tau(i)$, $l=\tau(j)$ כך ש- $i<j$, או מן הצורה: $k=\tau(j)$, $l=\tau(i)$ כך ש- $i<j$.

[כלומר, מכיוון ש-τ תמורה ולכן ניתן להגדיר: $i=\tau^{-1}(k)$, $j=\tau^{-1}(l)$ במקרה שבו $\tau^{-1}(k)<\tau^{-1}(l)$, ו- $i=\tau^{-1}(l)$, $j=\tau^{-1}(k)$ במקרה שבו $\tau^{-1}(k)>\tau^{-1}(l)$.]

$$= \prod \sigma \ldots \cdot \prod (-1) \ldots$$

$$= \underbrace{\prod_{1\le k<l\le n} \sigma_{k,l}}_{\mathrm{sign}(\sigma)} \underbrace{\prod_{\substack{1\le i<j\le n\\ \tau(j)<\tau(i)}} (-1)}_{\parallel}$$

$$\prod_{1\le i<j\le n} \tau_{i,j} = \mathrm{sign}(\tau)$$

(כי כאשר $\tau(i)<\tau(j)$, מקבלים ש- $\tau_{i,j}=1$.)

לסיכום,

$$\mathrm{sign}(\sigma\tau) = \mathrm{sign}(\sigma)\,\mathrm{sign}(\tau).$$

מ.ש.ל.