

**חשבון אינפי מתקדם**  
**פתרון תרגיל 5 – נקודות קיצון מקומי.**

$$u(x, y, z) = 3x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 2z + 1 \quad \text{א.}$$

נקודות חשודות לקיצון הן פתרונות של המערכת :

$$\begin{cases} u'_x = 9x^2 + 6y = 0 \\ u'_y = 2y + 6x = 0 \\ u'_z = 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

$(0, 0, 1)$  ו-  $(2, -6, 1) \Leftarrow$  נקודות חשודות לקיצון .

$$\begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} & u_{xz} \\ u_{yx} & u_{yy} & u_{yz} \\ u_{zx} & u_{zy} & u_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18x & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

• נבדוק את הנקודה  $(0, 0, 1)$  :

$$\Delta_2(0, 0, 1) = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -36 < 0$$

$\Leftarrow$  אין קיצון בנקודה  $(0, 0, 1)$  .

או אחרת ניתן לבדוק ע"ע בנקודה  $(0, 0, 1)$  :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 6 & 0 \\ 6 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda(2-\lambda)-36) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 36) = 0$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{37}$$

$\Leftarrow$  ע"ע עם סימנים שונים  $\Leftarrow$  אין קיצון .  $\lambda_1 = 2 > 0$ ,  $\lambda_2 = 2 - \sqrt{37} < 0$

• נבדוק את הנקודה  $(2, -6, 1)$  :

$$\begin{vmatrix} 36 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = 36 > 0$$

$$\Delta_2 = 72 - 36 > 0$$

$$\Delta_3 = 2(72 - 36) > 0$$

$\Leftarrow$  נקודת מינימום מקומי  $(2, -6, 1)$  .

$$u(x, y, z) = 8 - 6x + 4y - 2z - x^2 - y^2 - z^2 \quad \text{ב.}$$

נקודות חשודות לקיצון הן פתרונות של המערכת :

$$\begin{cases} u'_x = -6 - 2x = 0 \\ u'_y = 4 - 2y = 0 \\ u'_z = -2 - 2z = 0 \end{cases}$$

נקודה חשודה לקיצון  $(-3, 2, -1) \Leftarrow$

$$\begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} & u_{xz} \\ u_{yx} & u_{yy} & u_{yz} \\ u_{zx} & u_{zy} & u_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$\Leftarrow$  כל הע"ע-ים שליליים  $(-3, 2, -1) \Leftarrow$  נקודת מקסימום מקומי .

$$u(x, y) = 3(x^2 + y^2) + x^3 + 4y \quad \text{ג.}$$

נקודות חשודות לקיצון הן פתרונות של המערכת :

$$\begin{cases} u'_x = 6x - 3x^2 = 0 \\ u'_y = 6y + 4 = 0 \end{cases}$$

נקודות חשודות לקיצון  $\left(2, -\frac{2}{3}\right), \left(0, -\frac{2}{3}\right) \Leftarrow$

$$\begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yz} & u_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 - 6x & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$$

• נבדוק את הנקודה  $\left(0, -\frac{2}{3}\right)$  :

$$\Delta_1\left(0, -\frac{2}{3}\right) = 6 > 0$$

$$\Delta_2\left(0, -\frac{2}{3}\right) = 36 > 0$$

$\left(0, -\frac{2}{3}\right) \Leftarrow$  נקודת מינימום מקומי .

• נבדוק את הנקודה  $\left(2, -\frac{2}{3}\right)$  :

$$\Delta_1\left(2, -\frac{2}{3}\right) = -6 < 0$$

$$\Delta_2\left(2, -\frac{2}{3}\right) = -36 < 0$$

$\left(2, -\frac{2}{3}\right) \Leftarrow$  אין קיצון בנקודה

$$u(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2 \quad \text{ד.}$$

נקודות השודות לקיצון הן פתרונות של המערכת :

$$\begin{cases} u_x = 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ u_y = 2xy + 2y = 0 \end{cases}$$

$\Leftarrow (0,0), \left(-\frac{5}{3}, 0\right), (-1,2), (-1,-2)$  נקודות השודות לקיצון .

$$\begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yz} & u_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x+10 & 2y \\ 2y & 2x+2 \end{vmatrix}$$

• נבדוק את הנקודה  $(0,0)$  :

$$\Delta_1(0,0) = 10 > 0$$

$$\Delta_2(0,0) = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 20 > 0$$

$\Leftarrow (0,0)$  נקודת מינימום מקומי .

• נבדוק את הנקודה  $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$  :

$$\Delta_1\left(-\frac{5}{3}, 0\right) = -10 < 0$$

$$\Delta_2\left(-\frac{5}{3}, 0\right) = \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10/3 + 2 \end{vmatrix} = \frac{40}{3} > 0$$

$\Leftarrow \left(-\frac{5}{3}, 0\right)$  נקודת מקסימום מקומי .

• נבדוק את הנקודה  $(-1, 2)$  :

$$\Delta_1(-1,2) = -2 < 0$$

$$\Delta_2(-1,2) = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

$\Leftarrow (-1,2)$  אין קיצון בנקודה  $(-1,2)$ , ז"א  $(-1,2)$  נקודת אוכף .

• נבדוק את הנקודה  $(-1,-2)$  :

$$\Delta_1(-1,-2) = -2 < 0$$

$$\Delta_2(-1,-2) = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

$\Leftarrow (-1,-2)$  אין קיצון בנקודה  $(-1,-2)$  .