תירגול 7 - טורי חזקות

18 במאי 2014

הגדרה: טור חזקות הוא מקרה פרטי של טורי פונקציות. הוא טור פונקציות מהצורה $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ כאשר a_k קבועים.

סימון: $R = 1/\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ נקרא רדיוס ההתכנסות של הטור (קושי).

משפט: יהיה $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות R אזי

1. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k < \infty \Leftarrow |x_0| < R$

2. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ מתבדר $\Leftarrow |x_0| > R$

הערות:

1. תמיד יש התכנסות ב $x = 0$ במקרה ש $R = 0$ פירושו שההתכנסות בנקודה $x = 0$ בלבד.

2. R יכול להיות גם ∞ שפירושו שהטור מתכנס בכל הישר

3. לא ניתן לדעת כלום על $|x_0| = R$
   למשל
   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ בעל רדיוס התכנסות $R = 1$ ומתכנס ב $x = \pm 1$
   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ בעל רדיוס התכנסות $R = 1$ ומתכנס ב $x = -1$ ומתבדר ב $x = 1$
   $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ בעל רדיוס התכנסות $R = 1$ ומתבדר ב $x = \pm 1$

4. אם הטור מתכנס גם עבור $x = R$ אזי הפונקציה $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ רציפה משמאל בנקודה $x = R$

5. בכל תת קטע סגור $[a, b] \subseteq [-R, R]$ שבו הטור מתכנס - ההתכנסות היא במ"ש

6. ניתן לחשב את R גם ע"י המשפט (דלמבר):
   $R = 1/\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

דוגמאות:

1. מה תחום ההתכנסות של $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n^2}$?

לפי דלמבר $\frac{1}{2} = {}^2(\frac{n}{n+1})\frac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} = \frac{1/2^{n+1}(n+1)^2}{1/2^n n^2} \lim\limits_{n\to\infty} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \lim\limits_{n\to\infty}$ ולכן רדיוס ההתכנסות $R = 2$ ולכן יש התכנסות ב $(-2,2)$.

עבור $|x| = 2$ נקבל $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{2^n n^2}$ שמתכנס ולכן תחום ההתכנסות הוא $[-2,2]$

2. מה תחום ההתכנסות של $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n n^2}$?

נחשוב על הטור כ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{2^n n^2}$ כאשר $y = x+1$. לפי סעיף קודם הטור מתכנס עבור $y \in [-2,2]$ ולכן עבור $x+1 \in [-2,2]$ ולכן עבור $x \in [-3,1]$

משפט: יהיה $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות R אזי

1. אם נעשה אינטגראציה איבר איבר $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \int_0^x a_k t^k dt = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$ נקבל בעל אותו רדיוס התכנסות R

2. לכל $|x| < R$ מתקיים $\int_0^x \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right) dt = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$ השיוון יהיה נכון גם עבור $x = R$ במידה שהטור מתכנס שם.

משפט: יהיה $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות R אזי

1. אם נעשה גזירה איבר איבר $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k x^{k-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot a_{k+1} x^k$ נקבל בעל אותו רדיוס התכנסות R

2. לכל $|x| < R$ מתקיים $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)' = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot a_{k+1} x^k$ השיוון יהיה נכון גם עבור $x = R$ במידה שהטור מתכנס שם.

תרגיל: חשב את הפונקציה $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

פתרון: נחשב רדיוס רדיוס התכנסות. כיוון ש $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = 2k-1 \\ 0 & 2k \end{cases}$ $= \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[2k-1]{1/(2k-1)}$

שזה תת סדרה של $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n}$ שמתכנסת ל 1 ולכן רדיוס ההתכנסות 1.

ב $|x| = 1$ יש התבדרות!

ולכן לכל $x \in (-1,1)$ מתקיים לפי משפט

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} [x^2]^{(n-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} [x^2]^n = \frac{1}{1-x^2}$$

ולכן

$$S(x)=S(x)-0=S(x)-S(0)=\int_0^x S'(t)dt=\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$$

תרגיל: חשב את $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$

פתרון: נרצה לחשוב על התרגיל כהצבה $x=1/2$ בטור $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ - האם זה אפשרי? נבדוק את רדיוס של הטור:
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{n}=1$ ולכן רדיוס ההתכנסות הוא 1 ולכן ניתן להציב את הנקודה $1/2$. כעת,

$$S(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

נגדיר $H(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ גם כן עם רדיוס התכנסות 1 ולכן ממשפט אינט' איבר איבר ניתן לקבל שבתחום $[-0.9,0.9]$ מתקיים

$$\int_0^x H(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$$

ולכן

$$H(x)=(\frac{x}{1-x})'=\frac{1-x+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

ומכאן

$$S(x)=x\cdot H(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$$

ולסיום

$$S(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\cdot 4=2$$