הרצאה 12

תזכורת – מרחב קואורדינטות

כאשר: $\dim_{\mathbb{F}} V = n$

בהינתן בסיס B:

$$V \to \mathbb{F}^n$$
$$v \mapsto [v]_B$$

איזומורפיזם של מ"ו
לינארי
(חח"ע ועל)

רוצים לעבור מייצוג לפי בסיס אחד לייצוג לפי בסיס אחר
נכפול במט' המעבר בין הבסיסים:

$$\underbrace{[I]^{B_1}_{B_2}}_{\text{המט' המייצגת של הה"ל הזהות } V \to V} [v]_{B_1} = [v]_{B_2}$$

כאשר נתונה $T: V \to W$ ה"ל, המט' המייצגת:

V – בסיס B, W – בסיס C

$$[T]^B_C = \begin{bmatrix} | & & | \\ [Tv_1]_C & \cdots & [Tv_n]_C \\ | & & | \end{bmatrix}$$

כאשר $B = \{v_1, \dots, v_n\}$

כאשר $V = W$ ו- $T = I_V$ – העתקת הזהות:

$$[I]_C^B = \begin{bmatrix} | & & | \\ [v_1]_C & \cdots & [v_n]_C \\ | & & | \end{bmatrix}$$

מט' המעבר בין בסיסים כפי שהגדרנו לפני מספר הרצאות.

דוגמה: תהי $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ העתק הגזירה.
צוגי ה.ל.

יהיו שני בסיסים:

$$B_1=\{\overbrace{1+x}^{v_1},\ \overbrace{1+x^2}^{v_2},\ \overbrace{x+x^2}^{v_3}\}$$

$$B_2=\{\underbrace{1+x+x^2}_{w_1},\ \underbrace{1+x^2}_{w_2},\ \underbrace{1-x+x^2}_{w_3}\}$$

$$[T]_{B_2}^{B_1} = ?$$

נעבור למרחב הקואורדינטות לפי הבסיס הסטנדרטי.

$$E=\{1,x,x^2\}$$

$$[I]_E^{B_1} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [v_1]_E & [v_2]_E & [v_3]_E \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[I]_E^{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \end{bmatrix}$$

מאחר כי.. המט׳ הפיכות $\Leftarrow B_1,B_2$ אלו בסיסים.
כדי לחשב מט׳ מעבר:

$$Tv_1 = 1, \quad Tv_2 = 2x, \quad Tv_3 = 1+2x$$

וקטו׳ הקוא׳:

$$[Tv_1]_E = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad [Tv_2]_E = \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}, \quad [Tv_3]_E = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$$

כדי לעבור לוקטו׳ קואו׳ לפי B_2:

$$[I]^E_{B_2} \underbrace{[Tv_1]_E} = [Tv_1]_{B_2}$$

$$\vdots$$

$$[I]^E_{B_2} \underbrace{[Tv_3]_E} = [Tv_3]_{B_2}$$

$$[I]^E_{B_2} = \left([I]^{B_2}_E\right)^{-1}$$

עמודות של:

$$[T]^{B_1}_{B_2}$$

$$\operatorname{Ker} T = \{v \in V \mid Tv = 0\}.$$

$$\operatorname{Im} T = \{w \in W \mid \exists v \in V: Tv = w\}.$$

ראינו קשר בין מרחבים של ט"ל למרחבי המט' המייצגת:

$$N\left([T]_C^B\right)=\left\{[v]_B \mid v\in \operatorname{Ker} T\right\}$$

B בסיס ל-V $\qquad T:V\to W$

C בסיס ל-W

$$C\left([T]_C^B\right)=\left\{[w]_C \mid w\in \operatorname{Im} T\right\}$$

$$\left(\operatorname{rank} T=\operatorname{rank}[T]_C^B=\dim_{\mathbb{F}}\operatorname{Im} T\right)$$

• ראינו שהרכבת ט"ל מתאימה לכפל מט' מייצגות:

$$T:\underset{B}{V}\longrightarrow \underset{C}{W}$$ בסיסים:

$$S:\underset{C}{W}\longrightarrow \underset{D}{U}$$ בסיסים:

מתקיים:

$$[S\circ T]_D^B=[S]_D^C\cdot[T]_C^B$$

ולכן: (אם T הפיכה)

$$[T^{-1}]_B^C=\left([T]_C^B\right)^{-1}$$

הערה:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] & W \arrow[r, "S"] & U \\
B \arrow[r] & C \arrow[d, "\text{מט' מעבר}"'] & \\
 & C' \arrow[r] & D
\end{tikzcd}$$

$$[S\circ T]^B \qquad [S]^{C'} \qquad [I]^{C} \qquad [T]^{B}$$

$$[S\circ T]_P = [S]_D \cdot [I]_C^{-1} \cdot [T]_C$$

מטריצות דומות

<u>הגדרה</u>: אומרים כי מט' ריבועיות $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ הן <u>דומות</u> אם קיימת מט' הפיכה:

$P\in M_n(\mathbb{F})$ כך ש-

$$* \quad B = PAP^{-1}$$

זהו יחס שקילות:

- $A = I\cdot A I^{-1}$
- $B = PAP^{-1} \iff A = P^{-1}BP$
- $B = PAP^{-1};\ C = QBQ^{-1} \Rightarrow C = (QP)AP^{-1}Q^{-1} =$

$$= (QP)A(QP)^{-1}$$

<u>דוגמה</u>:

האם $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ דומות?

תשובה - כן:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

(שוו $P = P^{-1}$)

טענה: אם $T:V\to V$ ה"ל,

B_1, B_2 בסיסים של V אז:

$[T]_{B_2}^{B_2}$, $[T]_{B_1}^{B_1}$ דומות.

הוכחה:

$$\underbrace{[T]_{B_2}^{B_2}}=\underbrace{[I]_{B_2}^{B_1}}_{P^{-1}}\cdot\underbrace{[T]_{B_1}^{B_1}}\cdot\underbrace{[I]_{B_1}^{B_2}}_{P}$$

כי ראינו: $[I]_{B_2}^{B_1}=\left([I]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}$.

דומות.

מ.ש.ל.

הכיוון ההפוך:

טענה: אם $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ דומות אז קיימת ה"ל

$T:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n$

ובסיסים C_1, C_2 של $\mathbb{F}^n$ כך ש-

$A=[T]_{C_1}^{C_1}$

$B=[T]_{C_2}^{C_2}$

צ״ל, מט״ל רק בבסיסים אחרים מייצגות את אותה ה״ל.

<u>הוכחה:</u>

ראשית נקח $C_1 = E_n$ הבסיס הסטנדרטי.
ונגדיר גם $T:\mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$:

$$Tv := Av$$

נחשב את $[T]^{C_1(=E)}_{C_1(=E)}$:

$$[T]^E_E = \begin{bmatrix} | & & | \\ [Te_1]_E & \cdots & [Te_n]_E \\ | & & | \end{bmatrix} \overset{\text{הגדרת } T}{=}$$

$$= \begin{bmatrix} | & & | \\ [Ae_1]_E & \cdots & [Ae_n]_E \\ | & & | \end{bmatrix} \overset{\text{מכפלת מט׳ בעמודות.}}{=}$$

$$= \begin{bmatrix} | & & | \\ C_1(A) & \cdots & C_n(A) \\ | & & | \end{bmatrix} = A$$

כעת נגדיר בסיס C_2 כך ש-
$[T]^{C_2}_{C_2} = B$.

מצאנו לכן כי: $B = P^{-1}AP$ עבור מט׳ הפיכה P.

P הפיכה ולכן עמודותיה מהוות בסיס ל- $\mathbb{F}^n$

נגדיר $C_2=\{C_1(P),\dots,C_n(P)\}$ עמודות P.

$$[I]^{C_2}_{E}=\begin{bmatrix} | & & | \\ [C_1(P)]_E & \cdots & [C_n(P)]_E \\ | & & | \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} | & & | \\ C_1(P) & \cdots & C_n(P) \\ | & & | \end{bmatrix}=P.$$

ולכן:

$$[I]^{E}_{C_2}=P^{-1}.$$

מסקנה:

$$[T]^{C_2}_{C_2}=\underbrace{[I]^{E}_{C_2}}_{P^{-1}}\cdot\underbrace{[T]^{E}_{E}}_{A}\cdot\underbrace{[I]^{C_2}_{E}}_{P}=B$$

ולכן $B=[T]^{C_2}_{C_2}$. כנדרש. מ.ש.ל.

תרגיל: יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times m}$. הראו כי:

(1) קיימת $M\in\mathbb{F}^{m\times m}$ כך ש- $AM=B$

$\iff$

(2) $C(B) \subseteq C(A)$

הוכחה:

נגדיר לכל A,B כנ"ל:

$$T_A, T_B : \overset{V}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{F}^m}} \longrightarrow \mathbb{F}^n = W$$

$$T_A v := A\cdot v, \quad T_B v := B\cdot v$$

ואז:

$$S : \mathbb{F}^m \longrightarrow \mathbb{F}^m$$

כך ש-

$$Sv := M\cdot v$$

ונסמן:

$$[T_A]^{E_V}_{E_W} = A, \quad [T_B]^{E_V}_{E_W} = B,$$

$$[S]^{E_V}_{E_V} = M.$$

כמו כן:

$$AM = B \Rightarrow T_A \circ S = T_B$$

מכיוון ש-

$$T_A v = A\cdot v$$

$$T_B v = B\cdot v$$

$$Sv = M\cdot v$$

$$AM = B \Rightarrow AMv = Bv =$$

$$\Rightarrow A(M) = B$$

$$\Rightarrow \underbrace{A(\underbrace{Mv}_{S_v})}_{T_A(S_v)} = \underbrace{Bv}_{T_B v} \Rightarrow (T_A \circ S)v = T_B v$$

מתרגם לשפה של ה"ל:

$$C(B) = C\left([T_B]_{E_W}^{E_V}\right) = \left\{ [w]_{E_W} \,\middle|\, w \in \operatorname{Im} T_B \right\} =$$

$$= \left\{ [T_B v]_{E_W} \,\middle|\, v \in V \right\} = \leftarrow T_B = T_A \circ S$$

$$= \left\{ [(T_A \circ S)v]_{E_W} \,\middle|\, v \in V \right\} =$$

$$= \left\{ [T_A(S_v)]_{E_W} \,\middle|\, v \in V \right\} \subseteq$$

$$\subseteq \left\{ [T_A u]_{E_W} \,\middle|\, u \in V \right\} =$$

$$= \left\{ [w]_{E_W} \,\middle|\, w \in \operatorname{Im} T_A \right\} = C\left([T_A]_{E_W}^{E_V}\right) =$$

$$= C(A)$$

$(1) \Leftarrow (2)$: נניח $C(B) \subseteq C(A)$ ונראה:

$$\exists M : \quad AM = B$$

אז נעבר של ה"ל:

נראה שקיימת $S:V\to V$ כך ש-

$$T_A \circ S = T_B$$

כאשר נתון לנו: $\text{Im}\,T_B \subseteq \text{Im}\,T_A$

יהי D בסיס ל-V.

נגדיר S כדלקמן:

לכל $v\in D$, נתבונן ב- $T_B v$.

ידוע לנו כי: $\text{Im}\,T_B \subseteq \text{Im}\,T_A$

ולכן: $\exists u\in V: \underbrace{T_A u}{} = \underbrace{T_B v}_{\in \text{Im}\,T_A}$ כי:

נגדיר: $Sv := u$.

לפי משפט ההגדרה, S הנ"ל מוגדרת היטב.

כעת, לכל $v\in D$:

$$(T_A\circ S)v = T_A(Sv) = T_A u = T_B v$$

לפנינו שתי ה"ל: T_B ו- $T_A\circ S$

השולחות את וקטורי הבסיס (D) לאותם וקטורים.

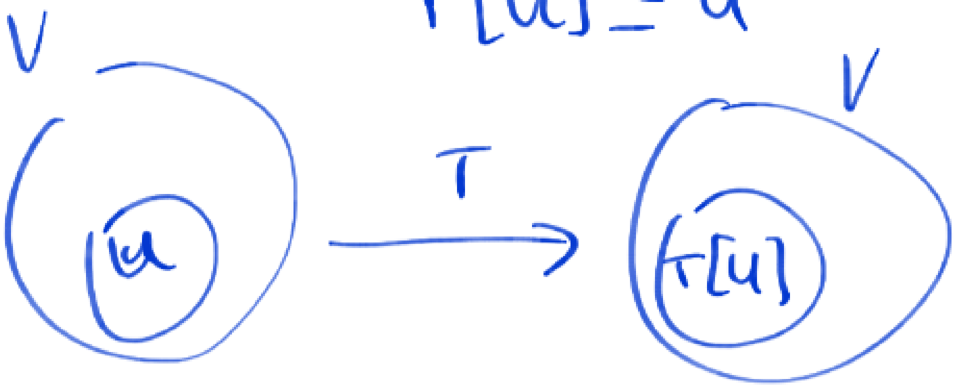
נימוק: כי משפט ההגדרה (יחידות!) מתקיים:

$T_A \circ S = T_B$, כפי שרצינו!

מ.ש.ל.

<u>תרגיל</u>: תהי $T:V\to V$ ה"ל. נניח כי $U\le V$ תמ"ו כך ש-

$$T[U]\subseteq U$$



נניח: $\dim_F V = n$
$\dim_F U = d$ $(d<n)$

הוכיחו כי קיימת מט' מייצגת ל-T מהצורה:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad}^{d} & \end{array} \\ \begin{array}{c} d \\ \\ \\ n-d \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & * \\ * & \cdots & * & * & \cdots & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right] \\ & \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad\qquad}_{d} & \underbrace{\qquad\qquad}_{n-d} \end{array} \end{array}$$

״ $\{v_1,\dots,v_d\}$ בסיס ל- U

נשלים אותו לבסיס של V:

$$B := \{v_1,\dots,v_d,v_{d+1},\dots,v_n\}$$

נחשב את המט׳ המייצגת של T ביחס ל-B.

$T[U]\subseteq U$ לכן:

$$Tv_1,\dots,Tv_d \in U$$

ולכן ניתן לכתוב אותם כך:

$$Tv_1 = \alpha_{11}v_1+\dots+\alpha_{1d}v_d$$
$$\vdots$$
$$Tv_d = \alpha_{d1}v_1+\dots+\alpha_{dd}v_d$$

$$[Tv_1]_B = \begin{bmatrix}\alpha_{11}\\ \vdots\\ \alpha_{1d}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n-d \text{ אפסים}\end{matrix},\ \dots,\ [Tv_d]_B = \begin{bmatrix}\alpha_{d1}\\ \vdots\\ \alpha_{dd}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n-d \text{ אפסים}\end{matrix}$$

כלומר:

$$[T]^B_B = \begin{bmatrix} | & & | & | & & | \\ [Tv_1]_B & \cdots & [Tv_d]_B & [Tv_{d+1}]_B & \cdots & [Tv_n]_B \\ | & & | & | & & | \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{d1} & * & \cdots & *\end{bmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix}
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\alpha_{d1} & \cdots & \alpha_{dd} & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & * & \cdots & *
\end{pmatrix}
$$

רצינו כפי שביקשנו. מש.ל.

11

דטרמיננטות

סגולה:

דטרמיננטה היא פונקציה שמקבלת מט' ריבועית ומחזירה ערך בשדה.

* A הפיכה $\iff \det(A) \neq 0$
* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

$\vdots$

נתחיל בהכנה:

תמורות

הגדרה: תמורה של n איברים $\{1,\dots,n\}$ הינה פונקציה חח"ע ועל:

$$\sigma : \{1,\dots,n\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}$$

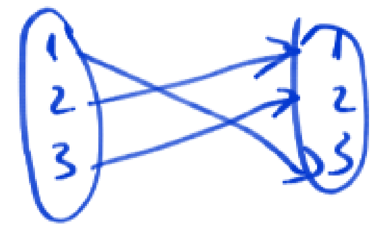
קטנה

את אוסף התמורות על n איברים
אנו מסמנים: S_n.

כמה דרכים לייצג תמורות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

למשל:

$\sigma:$ 

נכתוב:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>הערה</u>: מס' התמורות על n איברים הינו $n!$.

$\sigma(1) =$ n אפשרויות
$\sigma(2) =$ $n-1$ אפשרויות
($\sigma(1)$ תפס מקום אחד)

$\vdots$

$\sigma(n-1) =$ 2 אפשרויות
$\sigma(n) =$ אפשרות אחת

הצגה באמצעות <u>מחזורים זרים</u>:

מחזור $(i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_k)$ מסמן את התמורה

המשמעות:

$$\sigma(i_1)=i_2$$
$$\sigma(i_2)=i_3$$
$$\vdots$$
$$\sigma(i_{k-1})=i_k$$
$$\sigma(i_k)=i_1$$

את כל האיברים שאינם מצוינים במחזור, σ משאיר לעצמם. כל איבר מופיע במחזור לכל היותר פעם אחת.

דוגמה - $\sigma=(1\ 2\ 4)\in S_5$ היא התמורה:

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

הגדרה: נאמר כי שני מחזורים:

$$(i_1 \cdots i_k),\ (j_1 \cdots j_l)\in S_n$$

הם זרים אם:

$$\{i_1,\dots,i_k\}\cap\{j_1,\dots,j_l\}=\emptyset$$

אין אינדקס משותף ששני המחזורים מציינים.

למשל: $(4\ 5),\ (1\ 2\ 3)\in S_5$ זרים

$(4\ 5),\ (1\ 2\ 4)\in S_5$ אינם זרים

$\sigma_1 \quad \sigma_2$

הערה – הסדר משנה: $(1\ 2\ 3) \neq (1\ 3\ 2)$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

מצד שני, אם נזיז את המחזור בצורה מעגלית, כן נקבל את אותה תמורה:

$$(1\ 2\ 3) = (2\ 3\ 1) = (3\ 1\ 2)$$

הרכבת תמורות: בהינתן שתי תמורות $\sigma, \tau \in S_n$ ניתן להרכיב אותן:

$$\tau\sigma \in S_n$$

$$\tau\sigma(i) := \tau(\sigma(i))$$

כלומר: הרכבת התמורות כפונקציות: $\tau \circ \sigma$.

דוגמה: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

נחשב $\sigma\tau$, $\tau\sigma$:

$$\sigma\tau: \begin{array}{l} \quad\ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4 \\ \xrightarrow{\tau} 3\ \ 1\ \ 4\ \ 2 \\ \xrightarrow{\sigma} 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4 \end{array}$$

לכן: $\sigma\tau: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = id$

תמורת הזהות.

במקרה כזה, אומרים כי $\tau = \sigma^{-1}$, $\sigma = \tau^{-1}$.

$$\tau\sigma : \quad \begin{array}{c} \\ \sigma \\ \\ \tau \\ \end{array} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

$\tau\sigma = id$.

כעת נרכיב מחזורים:

ב-S_4 נגדיר: $\sigma = (1\ 2\ 4)$, $\tau = (1\ 3\ 2)$, $\pi = (2\ 4)$

$$\sigma\tau\pi = (1\ 2\ 4)(1\ 3\ 2)(2\ 4) =$$
$$= (1\ 3\ 4\ 2)$$

$$\pi\tau\sigma = (2\ 4)(1\ 3\ 2)(1\ 2\ 4) =$$
$$= (3\ 4)$$

$$\sigma\pi\tau = (1\ 2\ 4)(2\ 4)(1\ 3\ 2) =$$
$$= (1\ 3)$$

$$\tau\sigma\pi = (1\ 3\ 2)(1\ 2\ 4)(2\ 4) =$$

$$= (2\ \ 3)$$

$$\tau\pi\sigma = (1\ \ 3\ \ 2)(2\ \ 4)(1\ \ 2\ \ 4) =$$

$$= (1\ \ 4\ \ 3\ \ 2)$$

טענה: לכל תמורה $\sigma \in S_n$ יש הצגה כמכפלה של מחזורים זרים.

לדוגמה:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

ניתן כמכפלה: $(1\ \ 2\ \ 3)(4\ \ 5)$

הסדר - נכתוב:

$$(1\ \ \sigma(1)\ \ \sigma(\sigma(1))\ \ \cdots\ \ \sigma^m(1))$$

או שבכל צעד מתווסף אבר נוסף, חדש, או שחוזרים לאבר שכבר הופיע במחזור.
נזכיר ש- $\{1,\dots,n\}$ קב' סופית, כלומר מתישהו בוודאות נגיע לאבר שכבר הופיע.
זה יכול להיות רק 1, מכיוון שהתמורה חח"ע ולכל יתר האיברים כבר יש מקור!

כעת ממשיכים מהאינדקס הקטן ביותר שאינו מופיע במחזור הראשון.

המחזורים זרים מכיוון שהתמורה היא חח"ע.

$$\ldots(\ \ i\ \ \sigma(i)\ \ )(\ \ j\ \ \sigma(j)\ \ )\ldots$$

אם מופיעים שני מחזורים לא זרים, ניתן לראות מחח"ע σ כי הם שווים, וזה לא ייתכן כי אנו מתחילים כל מחזור מאיבר שלא הופיע במחזורים הקודמים.

מ.ש.ל.

הגדרה: עגיל (transposition) הוא מחזור מאורך 2.

למשל: $(1\ 2)\in S_3$, $(2\ 4)\in S_5$, ...

$$(1\ 3)(1\ 2)=(1\ 2\ 3)$$

$$(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)=(1\ 2\ 3\ 4)$$

$$(1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)=(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$$

למה: כל מחזור הוא מכפלה של עגילים (לאו דווקא זרים).

הוכחה: יהי $\sigma=(i_1\ i_2\ \dots\ i_k)\in S_n$ מחזור.

נבדוק: $\sigma\overset{?}{=}\overbrace{(i_1\ i_k)\cdots(i_1\ i_3)(i_1\ i_2)}^{\text{נסמן: }\tau}$

- ראשית עבור $j\in\{i_1,\dots,i_k\}$: בשני הצדדים, j הינו נק' שבת (עבור שניהם).

נניח כי $j=i_m$ $(1\le m\le k)$:

$m<k$ $\qquad \sigma(j)=\sigma(i_m)=i_{m+1}$

$m=k$ $\qquad \sigma(i_k)=i_1$

נסמן: $T=(i_1\ i_2)(i_1\ i_3)\cdots(i_1\ i_k)$

$m\neq 1$: i_m מופיע במעגל אחד ויחיד (ה-$(m-1)$-י) בספירה כאשר סופרים מימין, ולכן:

$T=$

$$(i_1\ i_2)\cdots\underbrace{(i_1\ i_m)}_{i_m\mapsto i_1}\underbrace{(i_1\ i_{m+1})}_{i_1\mapsto i_{m+1}}\cdots(i_1\ i_k)$$

לכן עבור $1<m<k$:

במעגל ה-$(m-1)$-י נקבל $i_m\mapsto i_1$

ובמעגל ה-m-י נקבל $i_1\mapsto i_{m+1}$

ולא נגע יותר ב-i_{m+1}, ולכן:

$$T(i_m)=i_{m+1}$$

עבור $m=k$: i_k מופיע רק במעגל האחרון ולכן:

$$T(i_k)=i_1$$

עבור $m=1$:

$$\underbrace{(i_1\ i_k)\ \cdots\ (i_1\ i_3)}_{i_2 \text{ אינו מופיע!}}(i_1\ i_2) \qquad i_1 \mapsto i_2$$

לכן: $\tau(i_1)=i_2$.

לסיכום, לכל $1\le j\le n$ הראינו:

$$\sigma(j)=\tau(j)$$

ולכן $\tau=\sigma$. מ.ש.ל.

<u>מסקנה</u>: כל תמורה היא מכפלה של חילופים (לאו דווקא זרים).

<u>הוכחה</u>: כל תמורה היא מכפלה של מחזורים, וכל מחזור הוא מכפלה של חילופים. מ.ש.ל.

<u>דוגמה</u>: כתבו את $\sigma=(1\ 3\ 4)(2\ 6\ 5)\in S_6$ כמכפלה של חילופים.
נכתוב כל מחזור כמכפלה של חילופים:

$$\sigma=(1\ 4)(1\ 3)(2\ 5)(2\ 6).$$

<u>הגדרה</u>: מס. התמורות ב-S_n: $n!$

• מס' הטרנספוזיציות ב-S_n: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

• מס' המחזורים מאורך k ב-S_n:

$$\binom{n}{k} \cdot (k-1)!$$

סימן של תמורה (Sign)

סימון:

$$a_1 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

נגדיר עבור תמורה $\sigma \in S_n$ ושני אינדקסים:

$$1 \leq i < j \leq n$$

$$\sigma_{i,j} := \begin{cases} 1, & \sigma(i) < \sigma(j) \\ -1, & \sigma(i) > \sigma(j) \end{cases}$$

דוגמה:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{1,3} = 1 \qquad (2 < 5)$$

$$\sigma_{2,4} = -1 \qquad (3 > 1)$$

<u>הגדרה</u>: עבור $\sigma \in S_n$ תמורה.

הסימן של σ:

$$\boxed{\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^{\sigma} := \prod_{1 \le i < j \le n} \sigma_{i,j} \in \{\pm 1\}}$$

סימונים

(עוברים על כל הזוגות $i<j$)

עבור σ הדוגמה לעיל:

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \sigma_{1,2}\,\sigma_{1,3}\,\sigma_{1,4}\,\sigma_{1,5}\,\sigma_{2,3}\,\sigma_{2,4}\,\sigma_{2,5}\cdot\sigma_{3,4}\,\sigma_{3,5}\,\sigma_{4,5} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 1 =$$

$$= 1$$

<u>הגדרה</u> – תמורה שסימנה 1 נקראת <u>זוגית</u>,

תמורה שסימנה -1 נקראת <u>אי-זוגית</u>.

<u>הערה</u>:

$$\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^{\left|\left\{(i,j) \,\middle|\, \substack{i<j,\\ \sigma(i)>\sigma(j)}\right\}_{1\le i,j\le n}\right|}$$

מספר הזוגות עבורם $\sigma_{i,j} = -1$

<u>טענה:</u> תהיינה $\sigma,\tau\in S_n$. אזי:

$$sign(\sigma\tau)=sign(\sigma)\,sign(\tau)$$

<u>מסקנה:</u> ניתן לחשב סימן של תמורה בעזרת פירוק לעגלים.

$$sign\ \overbrace{(i\ j)}^{\sigma} = -1$$

<u>נחשב:</u> נניח $i<j$.

$$\overbrace{1\ 2\ \cdots}\ i\ \cdots\ j\ \overbrace{\cdots\ n}$$

יהי $1\le k<l\le n$. מהו

$$\sigma_{k,l}=\ ?$$

<u>$k,l\neq i,j$</u> :
$\sigma(k)=k$, $\sigma(l)=l$ $\Rightarrow \sigma_{k,l}=1$

<u>$k=i,\ l=j$</u> :
$\sigma(i)=j$, $\sigma(j)=i$ ולכן $\sigma_{i,j}=-1$ *

אם ~~אחד~~ בדיוק אחד מבין $\{k,l\}$ הוא $\{i,j\}$:

נניח $k<l$.
$\sigma_{k,l}=1 \Leftarrow k=j$
$\sigma_{k,l}=1 \Leftarrow l=i$
$k=i$. $i<l\le j$: $\sigma_{i,l}=-1$

$\sigma_{k,l} = -1 \quad : i \le k < j \ , \ l = j$

מספר האיברים שבהן תרמנו (-1) הוא:

$$2(j-i)$$

לכן תרמנו כאן מס' זוגי של (-1)-ים, וסה"כ:

$$\text{sign}(\sigma) = -1 \quad *$$

לכן:

$$\sigma = (i_k\ j_k) \cdots (i_2\ j_2)(i_1\ j_1)$$

עגלים (לאו דווקא זרים) $\Leftarrow$

$$\text{sign}(\sigma) = (-1)^k$$

בפרט, עבור מחזור מאורך l:

$$\text{sign}(i_1 \cdots i_l) =$$

$$= \text{sign}\big((i_1\ i_l) \cdots (i_1\ i_2)\big) = (-1)^{l-1}$$

<u>הערה</u> - תמורה היא זוגית אמ"מ היא מכפלה של מס' זוגי של עגלים.

<u>מסקנה</u> - אם σ זוגית אז $\tau = \sigma(i\ j)$ אי זוגית:

$$\text{sign}(\tau) = \text{sign}(\sigma) \cdot \text{sign}(i\ j) = -1$$

$$\underbrace{\qquad}_{+1} \qquad \underbrace{\qquad}_{-1}$$

אם σ אי-זוגית אז $\tau = \sigma (i\ j)$

זוגית:

$$\operatorname{sign}(\tau) = \underbrace{\operatorname{sign}(\sigma)}_{-1} \cdot \underbrace{\operatorname{sign}(i\ j)}_{-1} = +1.$$

<u>הגדרה</u> - דטרמיננטה של מטריצה:

תהי

$$A \in M_n(\mathbb{F})$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

נכנה: "אלכסון מוכלל"

$$\det(A) = |A| := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \overbrace{a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}}$$

סימונים

$\sigma \in S_n$: סוכמים על פני כל התמורות האפשריות.

כלו'

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

דוגמה: 2×2:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

התמורות של $S_2=\{\underbrace{id}_{+1},\ \underbrace{\overbrace{(1\ 2)}^{\text{נסמן: }\tau}}_{-1}\}$

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_2} \mathrm{sign}(\sigma)\cdot a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)} =$$

$$= \overbrace{\mathrm{sign}(id)}^{+1}\cdot \overbrace{a_{1,id(1)}}^{a_{11}}\overbrace{a_{2,id(2)}}^{a_{22}} +$$

$$+ \underbrace{\mathrm{sign}(\tau)}_{-1}\cdot \underbrace{a_{1,\tau(1)}}_{a_{12}}\underbrace{a_{2,\tau(2)}}_{a_{21}} =$$

$$= a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

3×3:

$$S_3=\{\underbrace{id}_{1},\ \underbrace{(1\ 2)}_{-1},\ \underbrace{(1\ 3)}_{-1},\ \underbrace{(2\ 3)}_{-1},\ \overbrace{(1\ 2\ 3)}^{1},\ \underbrace{(1\ 3\ 2)}_{1}\}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\ldots \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} =$$

$$= 1 \cdot a_{11} a_{22} a_{33} +$$
$$+ (-1) \cdot a_{12} a_{21} a_{33} + (-1) a_{13} a_{22} a_{31} +$$
$$+ (-1) \cdot a_{11} a_{23} a_{32} + 1 \cdot a_{12} a_{23} a_{31} +$$
$$+ 1 \cdot a_{13} a_{32} a_{21}$$