(סימון: $T = S^1 \times S^1$ - גלגל/טורוס)

יריעה n ממדית היא מרחב M האוסדורף עם בסיס בן מנייה, כך שלכל $x \in M$ יש סביבה שהיא הומאומורפית לכדור פתוח ב$\mathbb{R}^n$.

יריעה נקראת <u>סגורה</u> אם היא קומפקטית(ואז לא צריך לדרוש בסיס בן מניה כי זה נובע מהדרישות האחרות).

משטח הוא יריעה 2-מימדית.

האופרטור # "משרשר" בין שתי יריעות: למשל $T\#T$ הוא מעין "טורוס 8":

המישור הפרוייקטיבי

$\mathbb{R}P^n = {S^n}/{x\sim -x}$ - הספרה ה-n-מימדית כאשר כל נקודה שקולה לנקודה הנגדית. טענה: זוהי יריעה n-ממדית.

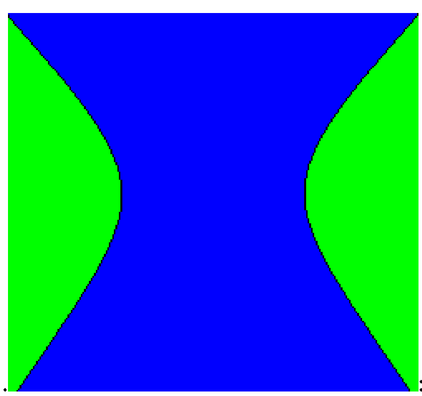
נגדיר $H \cong D^n$ התת-מרחב שמוגדרת ע"י $X_{n+1} \geq 0$(חצי ספרה עליונה). זה בעצם קבוצת מייצגים של אברי $\mathbb{R}P^n$ - אבל אפשר לסגור את זה לספרה שהיא יריעה n-ממדית.

הצגה שלישית של $\mathbb{R}P^2$

(נסמן את $\mathbb{R}P^2$ בP[רק אצלנו - זה לא סימון מקובל!])

אפשר לצייר את P בתור ריבוע, שכאשר יוצאים מנקודה אחת מגיעים מהצלע הנגדית, בצד השני של נקודת המרכז של אותה צלע(בניגוד לטורוס, שם מגיעים מהצלע הנגדית באותו קו אורך/רוחב שאליו נכנסנו).

נחלק את הריבוע לשני חלקים:



. נשים לב שאלו רק שני חלקים, שכן הירוקים מחוברים בצדדים.

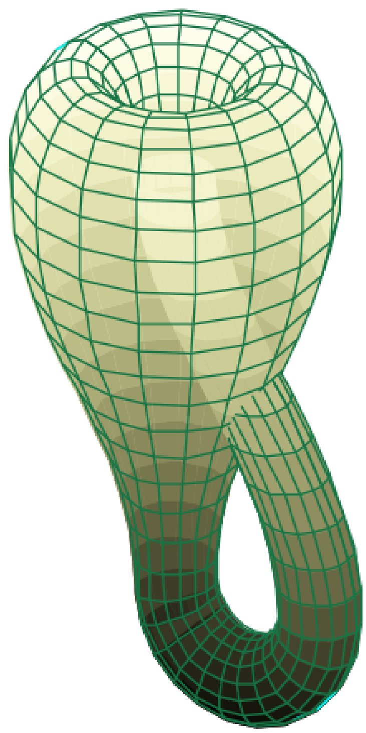
החלק הכחול הוא טבעת מוביוס(הצלע העליונה והצלע התחתונה מחוברות במהופך) והחלק הירוק הוא דיסק - ולכן הצגה נוספת של המישור הפרוייקטיבי $\mathbb{R}P^2$ הוא חיבור של טבעת מוביוס ודיסק - $T\#P$.

כל היריעות ממימד אחד הם חיבורים של S^1, וכל היריעות ממימד 2 הן חיבורים של S^2, nT וnP.

בקבוק קליין

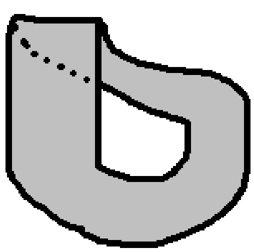
הפעם לוקחים ריבוע, זוג צלעות נגדיות אחד מחברים ישר ואת השני מחברים הפוך(בניגוד לטורוס שבו מחברים את שני הזוגות ישר ולמישור פרוייקטיבי שבו מחברים את שני הזוגות הפוך).

כשמחברים הזוג הישר מקבלים גליל. כשבאים לחבר את הזוג השני, אז אם נוותר על החד־חד ערכיות אפשר לצייר את זה ב$\mathbb{R}^3$:



נסמן את זה בK

טענה: $K = 2P$



הוכחה: אם נחתוך את K לשניים נקבל שתי טבעות מוביוס: .
כשמדביקים אותן לאורך השפה מקבלים בקבוק קליין.

הערה: טבעת מוביוס היא לא יריעה - כי יש לה שפה, שבה לנקודות אין סביבה שהיא עיגול פתוח - אבל כשמחברים לאורך השפה זה הופך ליריעה.

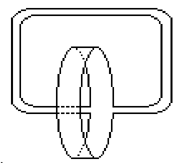
מה החבורות היסודיות של כל זה?

נתחיל מטורוס. נצייר עליו עיגול ונקרא לו U, ואת כל היתר(עם קצת חפיפה) נסמן בV.

$U \cap V$ זה הטבעת הקטנה על הטורוס.

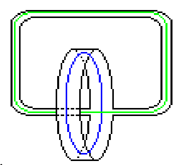
$\pi_1(U) = 1$(כי זה דיסק). $\pi_1(U \cap V) = F_1$(כי זה טבעת). נשאר לברר מה החבורה היסודית של V, ומה משרה ההכלה של $U \cap V$ לתוך V.

אפשר להגדיל את החור U עוד ועוד, ולשמור על הומאומורפיה לV - כל עוד החור נשאר דיסק(כלומר לא נסגר לגליל). אפשר להגדיל את החור עוד ועוד בשני המימדים, עד שנקבל שני גלילים מחוברים:



.

נסתכל על שני המסלולים:



. אם נסתכל על הצומת שבה הם מצטלבים - הצומת הזו כוויצה. אבל אפשר להוציא מסלולים שעוברים דרך כל אחת מהטבעות:

.

בחבורה, נסמן מסלולים שעוברים דרך גליל אחד בx וכאלה שעוברים דרך הגליל השני בy - ונקבל ש$\pi_1(V) = F_2$.

כעת, צריך להדביר את V וU בחזרה. נשים לב שכאשר מדביקים, אפשר $xyx^{-1}y^{-1} = 1$(שכן אפשר לסגור דרך U):

$$\begin{array}{ccc} {}^{\langle x,y|\rangle}F_2 & & \{1\}^{\langle 1\rangle} \\ {\scriptstyle xyx^{-1}y^{-1}\leftarrow z} \nwarrow & & \nearrow {\scriptstyle z\to 1} \\ & \underset{\langle z|\rangle}{F_1} & \end{array}$$

ולכן החבורה היסודית של הטורוס היא

$$\boxed{\left\langle x,y \middle| xyx^{-1}y^{-1} = 1 \right\rangle = F_1 \times F_1}$$

מה החבורה היסודית של nT?

נגיד $n=3$ - 

אם נפתח חור בטורוס, נוכל להרחיב אותו שיקח את כל הלמטה של הטורוס, ואז לחלק לשלושה חלקים: . כל חלק כזה הוא  כמו קודם, ולכן אם נחבר אותם נקבל . נסמן את המסלולים של כל זוג טבעות כאלה בa_i, b_i, ונקבל

$$\pi_1(nT) = \left\langle a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_n, b_n \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} = 1 \right\rangle$$

שכן

$$\begin{tikzcd}
\langle a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_n, b_n | \rangle & & \langle | \rangle \\
& \langle z | \rangle \arrow[ul, "z \mapsto a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

נשים לב - זאת לא חבורה אבלית! איך נאבל אותה? כלומר ?$\mathrm{Ab}\pi_1(nT) =$

אם $\begin{matrix} a_i b_j = b_j a_i \\ a_i a_j = a_j a_i \\ b_i b_j = b_j b_i \end{matrix}$ אז כל האלה בעצם גוררים $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} = 1$, ולכן

$$\boxed{\mathrm{Ab}\pi_1(nT) = \left\langle a_1, b_1, \ldots a_n, b_n \middle| \begin{matrix} a_i b_j = b_j a_i \\ a_i a_j = a_j a_i \\ b_i b_j = b_j b_i \end{matrix} \right\rangle = \underbrace{F_1 \times F_1 \times \cdots \times F_1}_{2n \text{ times}} = \mathbb{Z}^{2n}}$$

החבורה היסודית של המישור הפרוייקטיבי

שוב, נחתוך עיגול ונסמן אותו בU. $\pi_1(U) = 1$. מכיוון שמדובר במישור פרוייקטיבי, כשחתכנו את U חתכנו גם את הצד השני שלו - ולכן מה שנשאר לנו זה גליל. נסמן הקפה על הגליל בa. מכיוון שמדובר במישור פרוייקטיבי, שני הקפות סביב אותו גליל אפשר לכווץ

לנקודה אחת - כלומר $a^2 \sim 1$.

$$\begin{tikzcd} \langle a|\rangle & & \langle 1\rangle \\ & \langle z|\rangle \arrow[ul, "z\mapsto a^2"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\pi_1\left(P\right) = \left\langle a \middle| a^2=1\right\rangle \cong \mathbb{Z}/2}$$

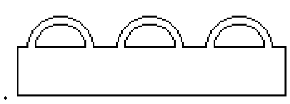
טענה

עבור $n \geq 2$, $\pi_1\left(\mathbb{R}P^n\right) = \mathbb{Z}/2$.

ומה עם שרשור של מישורים פרוייקטיבים? (כלומר nP)

שוב, $U = D^2$, $\pi_1\left(U\right) = 1$, $U \cap V$ זה טבעת, $\pi_1\left(U \cap V\right) = F_1$. מה זה V?

שוב, נרחיב את החור למטה ונחלק לn חלקים(לפי החיבורים של המישורים הפרווייטיבים):

. כל חלק כזה אפשר להפוך ל  , ואז לחבר בחזרה ל  . נקבל n מסלולים - $a_1, a_2, \dots a_n$ - ואם נעבור על כולם פעמיים נקבל 1. נקבל:

$$\begin{tikzcd} \langle a_1, \dots a_n|\rangle & & \langle 1\rangle \\ & \langle z|\rangle \arrow[ul, "z\mapsto a_1^2\cdot a_2^2\cdots a_n^2"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\pi_1\left(nP\right) = \left\langle a_1, a_2, \dots a_n \middle| a_1^2 a_2^2 \cdots a_n^2 = 1\right\rangle}$$

איך נאבל את זה?

$$\mathrm{Ab}\pi_1\left(nP\right) = {}^{\mathbb{Z}^n}\!/\!\left\langle \begin{pmatrix} z \\ z \\ \vdots \\ z \end{pmatrix} \right\rangle =?$$

כדי לקבוע הומומורפיזם $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$, צריך לבחור בסיס ל$\mathbb{Z}^n$ ולקבוע לאיזה איבר ב$\mathbb{Z}^m$ מעתיקים כל איבר בבסיס של $\mathbb{Z}^n$. אבל לבטא את זה ע"י מטריצה - $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto$
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^m$.

מתי הם איזומורפיים? כלומר מתי יש שתי מטריצות A, B כך ש $\mathbb{Z}^n \underset{B}{\overset{A}{\rightleftarrows}} \mathbb{Z}^m$?

צריך להתקיים $\begin{matrix} AB = I_m \\ BA = I_n \end{matrix}$. בשביל $AB = I_m$ צריך להתקיים $n > m$, ובשביל $BA = I_n$ צריך $n < m$ - לכן צריך סה"כ $n = m$.

אבל זה לא מספיק. בשדות, צריך גם $\det A \neq 0$, אבל כאן גם זה לא מספיק, כי מדובר ב$\mathbb{Z}$. אבל כאן כל הדטרמיננטות שלמות, וצריך $\det A \cdot \det B = 1$ - ולכן צריך $\det A = \pm 1$. האם זה מספיק? האם לכל $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ כך ש$\det A = \pm 1$ יש מטריצה הופכית? כן, כי $A^{-1} = \left(\frac{(-1)^{i+j}\det(A_{ij})}{\det A}\right)$ - ואם $\det A = \pm 1$ אז כל התוצאות ב$\mathbb{Z}$.

נבחר מטריצה שתעתיק את היוצר $\begin{pmatrix} z \\ \vdots \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, ואז נקבל ש

$${}^{\mathbb{Z}^n}\!/\!\left\langle \begin{pmatrix} z \\ \vdots \\ z \end{pmatrix} \right\rangle \cong {}^{\mathbb{Z}^n}\!/\!\left\langle \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cong {}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{2} \oplus \mathbb{Z}^{n-1}$$