

תרגיל בית 6 במבנים אלגבריים

89-214 סמסטר א' תש"ף

שאלה 1 (חימום). הוכיחו כי לכל $a, n, m \in \mathbb{Z}$ מתקיים $(an, am) = |a|(n, m)$.

שאלה 2 (חימום). תהי G חבורה מסדר n ויהי $\Phi: G \rightarrow S_n$ שיכון קיילי. הוכיחו שאיבר $g \in G$ הוא מסדר m אם ורק אם $\Phi(g)$ הוא מכפלה של $\frac{n}{m}$ מחזורים זרים מאורך m .

שאלה 3. נסמן כמה איברים של החבורה $GL_2(\mathbb{C})$:

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

ונסמן ב- Q את תת-החבורה הקטנה ביותר של $GL_2(\mathbb{C})$ שמכילה את I, J, K . היא נקראת חבורת הקוטריוניים. מצאו באופן מפורש שיכון של Q ב- S_8 . כלומר חשבו והוכיחו לאן עובר כל איבר.

רמז: מצאו את איברי Q וזה שבתאריך 16 באוקטובר 1843 חרט ויליאם רואן המילטון על גשר ברום

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

שאלה 4. מצאו בעזרת אלגוריתם אוקלידס את הממ"מ הבאים:

א. $(892, 140)$

ב. $(17840, -2800)$, רמז: העזרו בחימום.

שאלה 5. פתרו את בעיה 5 מפרוייקט אוילר: המספר 2520 הוא המספר הקטן ביותר שהחלוקה שלו בכל אחד מן המספרים מ-1 עד ל-10 היא ללא שארית. מה הוא המספר החיובי הקטן ביותר שמתחלק ללא שארית בכל המספרים מ-1 עד ל-20? הסבירו אם השיטה שלכם תעבוד בזמן סביר (פחות מדקה) גם למספרים מ-1 עד ל-100. מותר, ואפילו מומלץ, לתכנת כאן, ואז צריך להוסיף להגשה את התוכנה שכתבתם.

שאלה 6. הוכיחו שלכל מספר שלם n מתקיים $(5n + 4, 9n + 7) = 1$, ומצאו s, t (התלויים ב- n) כך ש- $(5n + 4)s + (9n + 7)t = 1$. רמז: אלגוריתם אוקלידס המורחב עובד גם עם פרמטרים.

שאלה 7. מצאו את כל המספרים השלמים n כך ש- $(n^2 + 8)|(n + 2)$.

שאלה 8. תהינה G, H חבורות, יהיו $g \in G, h \in H$ איברים מסדר אי זוגי, ונסתכל על האיבר $(g^2, h^2) \in G \times H$. הוכיחו $[o(g), o(h)] = o((g^2, h^2))$. כלומר הוכיחו שהסדר של (g^2, h^2) הוא הכפולה המשותפת המינימלית של $o(g)$ ו- $o(h)$.

שאלה 9 (רשות). תהי G חבורה ונתבונן בפונקציות $f(x) = x^3, g(x) = x^4, h(x) = x^5$ מהחבורה לעצמה. הוכיחו שהפונקציות האלו הן הומומורפיזמים (כולן יחד) אם ורק אם G אבליה.

בהצלחה!