$$\cancel{y''\frac{\partial f}{\partial y'}} + y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - y'\frac{\partial f}{\partial y} - \cancel{y''\frac{\partial f}{\partial y'}} = 0$$

ולכן

$$y'\left[(\lambda g y - c)\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right] - \sqrt{1+(y')^2}\,(\lambda g y - c) = D$$

$$\vdots$$

$$(\lambda g y - c)\frac{-1}{\sqrt{1+(y')^2}} = D$$

$$(y')^2 = \left(\frac{\lambda g y - c}{D}\right)^2 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{-1+(\quad)^2} \Rightarrow dx = \frac{dy}{\sqrt{\quad}}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{\quad}}$$

$$x - x_0 = \int \frac{dy}{\sqrt{-1+\left(\frac{\lambda g y - c}{D}\right)^2}} \cancel{= \cosh\left[\frac{\lambda g}{D}\right.}$$

אינטגרל: הצבה $u = \frac{\lambda g y - c}{D}$

$$u = \cosh\left[\frac{\lambda g}{D}(x - x_0)\right]$$

עקרונות: מינימום אנרגיה ואילוצים.

הרצאה 5

$$L = T - V$$

$$\delta I = \delta\int_{t_A}^{t_B} L\,dt = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i$$

$$0 = \delta I = \int_{t_A}^{t_B} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\delta q_i\,dt$$

כש $\{q_i\}_{i=1}^{n}$ בלתי תלויות

$$\forall q_i \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = 0$$

אילוצים מהסוג:

$$\sum_k a_{ek}\,dq_k + a_{et}\,dt = 0$$

$k = 1, 2, \dots, M$

כשיש אילוץ הולונומי

$$g_e(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) = 0$$

$$dg_e = 0 \Rightarrow \sum_k \frac{\partial g_e}{\partial q_k}dq_k + \frac{\partial g_e}{\partial t}dt = 0$$

ובחירה פרטית של

$$\sum_k a_{ek}\, dq_k + a_{et}\, dt$$

<u>נשים לב:</u> בהולונומי אפשר לעבוד עם הצבה במשוואות ועם שיטת כופלי לגרנז' אולם במשפחה הגדולה יותר אפשר להשתמש רק בכופלי לגרנז'.

$$0=\delta I = \int_{t_A}^{t_B} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\delta q_i\, dt$$

עכשיו נניח ש q_i הם תלויים

$$\sum_k a_{ek}\,\delta q_k = 0 \quad \Leftarrow$$

כי הווריאציה ה לא תלויה ב t

כופל לגרנז'

$$\forall e \quad \lambda_e \sum_k a_{ek}\,\delta q_k = 0$$

$$\sum_e \sum_k \lambda_e a_{ek}\,\delta q_k = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{t_A}^{t_B} \sum_e \sum_k \lambda_e a_{ek}\,\delta q_k\, dt = 0$$

$$\int_{t_A}^{t_B} \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right)\delta q_k\, dt + \int_{t_A}^{t_B} \sum_k \left(\sum_e \lambda_e a_{ek}\right)\delta q_k\, dt = 0$$

$$0 = \int \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} + \sum_e \lambda_e a_{ek}\right)\delta q_k\, dt$$

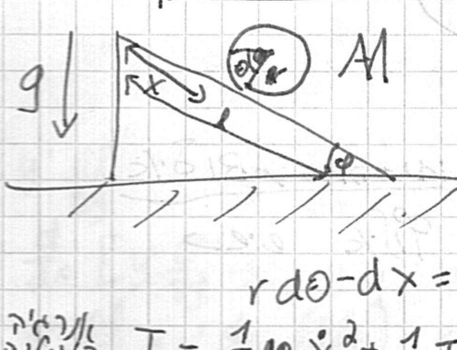
כיוון ש λ הם חופשיים אפשר לבחור כאלה שיאפסו את הביטוי (עובד רק בבחירה כזו!!!)

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} + \sum_e \lambda_e \cancel{a_e} a_{lk} = 0$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_e \lambda_e a_{lk}}$$

$$\boxed{\sum_k a_{lk}\dot q_k + a_{et} = 0} \Leftarrow$$ משוואות האילוץ

<u>דוגמה:</u>



אילוץ: $r\dot\theta - V = 0$

$$\Downarrow$$

$$r\,d\theta - dx = 0 \quad \Leftarrow \quad r\frac{d\theta}{dt} - \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\boxed{I = Mr^2}$$

אנרגיה קינטית $T = \frac{1}{2}M\dot x^2 + \frac{1}{2}I\dot\theta^2$

$$V = Mg(l-x)\sin\varphi$$

עכשיו אנחנו נפתור בעזרת כופלי לגרנז'

$$L = T - V$$
$$= \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} Mr^2\dot{\theta}^2 - Mg(l-x)\sin\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_l \lambda_l a_{lk}$$

$$r\,d\theta - dx = 0$$

$$\left.\begin{aligned} a_\theta &= r \\ a_x &= -1 \end{aligned}\right\}$$

$k = 1, 2$

$q_1 \to x$

$q_2 \to \theta$

יש לנו 3 משוואות

$$\text{I)}\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = -\lambda$$

$$\text{II)}\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \lambda r$$

$$\text{III)}\ r\dot{\theta} = \dot{x}$$

$$\text{I)}\ M\ddot{x} - Mg\sin\varphi = -\lambda$$

$$\text{II)}\ Mr^2\ddot{\theta} = \lambda r$$

$$\text{III)}\ r\dot{\theta} = \dot{x}$$

$$r\ddot{\theta} = \ddot{x} \Rightarrow Mr^2\ddot{\theta} = Mr\ddot{x} = \lambda r$$

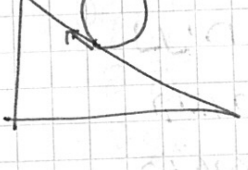
$$M\ddot{x} - Mg\sin\varphi = -M\ddot{x} \longleftarrow M\ddot{x} = \lambda$$

$$\ddot{x} = \frac{g\sin\varphi}{2} \qquad \ddot{\theta} = \frac{g\sin\varphi}{2r}, \quad \lambda = \frac{Mg\sin\varphi}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}\frac{g\sin\varphi}{2}t^2 + A_x t + B_x$$

$$\theta = \frac{1}{2}\frac{g\sin\varphi}{2r}t^2 + A_\theta t + B_\theta$$

$$\lambda = \frac{Mg\sin\varphi}{2}$$



מה ה-λ מייצג משמעות פיסיקלית.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_l \lambda_l a_{lk}$$

הראינו כוח מוכלל

$$Q_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

$$Q_k = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

כוחות משמרים

$$\vec{F}_i = -\nabla_i V$$

$$Q_k = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = -\sum \nabla_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

$$Q = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} + Q_k'$$

כוחות משמרים   כוחות לא משמרים

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} + Q_k'$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}(T-V) = Q_k'$$

V מהנחה שהפוטנציאל לא תלוי במהירות

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k'$$

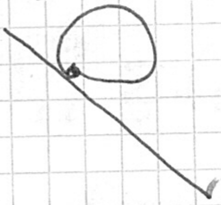
$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_\ell \lambda_\ell a_{\ell k}$$

נחזור לדוגמה.

$$\lambda = \frac{Mg\sin\varphi}{2}$$

$$Q_x = -\frac{Mg\sin\varphi}{2}$$



Q_θ - צריך היה מומנט כח.

סימטריה וחוקי שימור

קואורדינטה q_i מוגדרת להיות ציקלית אם

תנאי מספיק $\Rightarrow p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = const$

לדוגמה: חלקיק חופשי:

$$L = T = \tfrac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2)$$

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot x} = m\dot x \Rightarrow \frac{d}{dt}P_x - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

ולכן

$$\frac{d}{dt}P_x = 0$$

ולכן ציקלית $P_x = const$

$$m\dot x = P_x = const$$

הרצאה 6

נניח והמערכת שלנו היא סימטרית ביחס להזזות של הקואורדינטה כלשהי q_i כלומר הלגרנז'יאן לא משתנה עבור הזזה בקואורדינטה q_i

זה אומר ש V לא תלוי ישירות ב q_i

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0$$

$$p_i = const$$