תרגיל מספר 9 מבנים אלגבריים

1. יהא R חוג חילופי עם יחידה. איבר $a \in R$ יקרא מחלק אפס אם קיים $0 \neq b \in R$ כך ש $ab = 0$.

   (א) הוכיחו/הפירכו: אם $a \in R$ הפיך אז a אינו מחלק אפס.

   (ב) הוכיחו/הפריכו: אם $a \in R$ אינו מחלק אפס אז a הפיך.

2. יהא $a \in \mathbb{Z}$. הוכיחו: אם $\gcd(a,n) \neq 1$ אז $[a] \notin U_n$. (רמז: האם a מחלק אפס?).

3. יהא $p \in \mathbb{N}$. הוכיחו כי p ראשוני אמ"מ $\mathbb{Z}_p = {}^{\mathbb{Z}}\!/_{p\mathbb{Z}}$ הינו שדה.

4. יהא R חוג. יהיו I, J שני אידיאלים של R. הוכיחו כי $I \cap J$ גם אידיאל של R.

5. יהא R חוג קומטטיבי עם יחידה.

   (א) הוכיחו כי $Ra = \{ra : r \in R\}$ הוא אידיאל של R

   (ב) יהא $a \in R$. הוכיחו כי $Ra = R$ אמ"מ a הפיך.

   (ג) יהא $a \in R$. הוכיחו כי $Ra = \{0\}$ אמ"מ $a = 0$.

   (ד) הסיקו מי הם כל האידיאלים של $R = \mathbb{F}$ שדה.