תרגיל מספר 9 מבנים אלגבריים

להגשה עד 16.1.2015

1. יהא R חוג. הוכח את הבאים:

   (א) לכל $a \in R$ מתקיים $-(-a) = a$
   פתרון : צ"ל להוכיח כי $(-a) + a = 0$ וזה מתקיים לפי הגדרה

   (ב) לכל $a, b \in R$ מתקיים $-(a+b) = -a - b$
   פתרון : צ"ל להוכיח כי $a + b - a - b = 0$ בגלל חילופיות של החיבור

$$a + b - a - b = a - a + b - b = (a - a) + (b - b) = 0 + 0 = 0$$

   (ג) לכל $a, b \in R$ מתקיים $a(-b) = -(ab) = (-a)b$
   פתרון : צ"ל להוכיח כי $ab + a(-b) = 0 = ab + (-a)b$ בגלל תכונת הפילוג

$$ab + a(-b) = a(b - b) = a0 = 0$$

   וגם בצד השיוון השני מתקיים באופן דומה.

   (ד) לכל $a, b \in R$ מתקיים $(-a)(-b) = ab$
   פתרון : נשתמש בסעיפים קודמים

$$(-a)(-b) = [Ex.3] = (-(-a))b = [Ex.1] = ab$$

   (ה) לכל $a \in R$ מתקיים $(-a)^2 = a^2$
   פתרון : נשתמש בסעיף קודם עם $a = b$

$$(-a)^2 = (-a)(-a) = aa = a^2$$

2. יהיו R_1, R_2 שני חוגים. נגדיר את חוג המכפלה להיות הקבוצה $R_1 \times R_2$ עם חיבור וכפל רכיב רכיב כלומר

$$\forall (a, b), (x, y) \in R_1 \times R_2 : (a, b) + (x, y) = (a + x, b + y)$$

$$\forall (a, b), (x, y) \in R_1 \times R_2 : (a, b)(x, y) = (ax, by)$$

כאשר $a+x$ זהו חיבור של R_1, $b+y$ זהו חיבור של R_2. באופן דומה הכפלים המצוינים בשאלה מתייחסים לכפלים של R_1,R_2 לפי ההקשר. הוכח כי זהו אכן חוג.פתרון : ראינו כי הגדרה זאת נותנת חבורה חיבורית (וגם חילופית כי R_1,R_2 חילופיות ביחס לחיבור)

נראה קיבוציות של הכפל (יש סגירות לכפל לפי ההגדרה) - נשתמש בקיבוציות של R_1,R_2

$$
\begin{aligned}
\forall\,(a,b)\,,(x,y),(s,t) &\in R_1\times R_2:\\
& [(a,b)\,(x,y)](s,t)=(ax,by)\,(s,t)\\
&= ([ax]s,[by]t)=(a[xs],b[yt])=(a,b)(xs,yt)\\
&= (a,b)[(x,y)(s,t)]
\end{aligned}
$$

נסיים בפילוג- נשתמש בפילוג של R_1,R_2

$$
\begin{aligned}
\forall\,(a,b)\,,(x,y),(s,t) &\in R_1\times R_2:\\
& [(a,b)+(x,y)](s,t)=(a+x,b+y)\,(s,t)\\
&= ([a+x]s,[b+y]t)=(as+xs,bt+yt)\\
&= (as,bt)+(xs,yt)=(a,b)\,(s,t)+(x,y)(s,t)
\end{aligned}
$$

3. הוכיחו כי הבאים הם חוגים. קבעו האם אלו חוגים חילופיים, האם אלו חוגים עם יחידה והאם חוגים אלו עם חילוק.

(א) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]=\left\{a+b\sqrt{2}\,|a,b\in\mathbb{Z}\right\}$עם חיבור וכפל של מספרים שלמים (שימו לב שהקבוצה שהגדרנו היא תת קבוצה של המספרים הממשיים $\mathbb{R}$)

פתרון : נתחיל עם הטענה כי $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ביחס לחיבור היא חבורה כיוון שהיא תת קבוצה של הממשיים זה שקול להוכיח כי היא תת חבורה שלהם. נשתמש בקריטריון הקצר:

לכל $a+b\sqrt{2},x+y\sqrt{2}\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ מתקיים

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)-\left(x+y\sqrt{2}\right)=(a-x)+(b-y)\sqrt{2}\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$$

בנוסף $0\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

טענה הכפל ב $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ מוגדר וקיבוצי:

מוגדר: לכל $a+b\sqrt{2},x+y\sqrt{2}\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ מתקיים

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(x+y\sqrt{2}\right)=(ax+2by)+(ay+bx)\sqrt{2}\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$$

קיבוציות: נובע מקיבוציות של מספרים ממשיים

פילוג/חילופיות- גם נובע מפילוג/חילופיות של מספריים ממשיים.

בחוג $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ היחידה היא $1\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

החוג $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ אינו עם חילוק כי ל 2 אין הופכי. למה?

נניח בשלילה כי קיים $a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ כך ש $2(a+b\sqrt{2})=1$ זה גורר כי $2a-1=b\sqrt{2}$ בצד ימין יש מספר שלם. ולכן גם המספר בצד משאל שלם. זה קורה אמ"מ $b=0$. זה גורר $2a-1=0$ כלומר $a=\frac{1}{2}$ סתירה לכך ש $a\in\mathbb{Z}$

(ב) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]=\left\{a+b\sqrt{2}\,|a,b\in\mathbb{Q}\right\}$עם חיבור וכפל של מספרים שלמים (שימו לב שהקבוצה שהגדרנו היא תת קבוצה של המספרים הממשיים $\mathbb{R}$)

פתרון : פתרון דומה לסעיף הקודם של $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. ההבדל הוא ש $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ הינו חוג עם חילוק (ובעצם שדה).

הוכחה: יהא $0\neq\left(a+b\sqrt{2}\right)\in\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ צריך למצוא לו הופכי כלומר $c+d\sqrt{2}\in\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ המקיים

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(c+d\sqrt{2}\right)=1$$

זה שני משוואות בשני נעלמים c,d

$$\begin{aligned} ac+2bd &= 1\\ (ad+bc)\sqrt{2} &= 0\sqrt{2}\end{aligned}$$

זה מתרגם למערכת המשוואות:

$$\begin{pmatrix} a & 2b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix}$$

שיש לה פתרון אמ"מ $det(\begin{pmatrix} a & 2b\\ b & a\end{pmatrix})=a^2-2b^2\neq 0$ וזה אכן המצב.

הוכחה: נניח בשלילה כי $a^2-2b^2=0$ זה גורר כי $\left(\frac{a}{b}\right)^2=2$ או $b=0$

אם $\left(\frac{a}{b}\right)^2=2$ אז $\sqrt{2}=\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ סתירה.

אם $b=0$ אז $a=0$ גם כן ואז נקבל סתירה לכך ש $0\neq\left(a+b\sqrt{2}\right)$

(ג) הקבוצה $R=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}|\,a,b\in\mathbb{R}\right\}$ עם כפל וחיבור מטריצות.

פתרון : נתחיל עם הטענה כי R ביחס לחיבור היא חבורה כיוון שהיא תת קבוצה של המטריצות זה שקול להוכיח כי היא תת חבורה שלהם. נשתמש בקריטריון הקצר:

לכל $\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_2 & b_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in R$ מתקיים כי

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a_2 & b_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in R$$

בנוסף $0\in R$.

טענה הכפל ב $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ מוגדר וקיבוצי:

מוגדר: לכל $\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_2 & b_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in R$ מתקיים כי

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in R$$

קיבוציות: נובע מקיבוציות של מטריצות

פילוג־ גם נובע מפילוג של מטריצות.

R אינו חילופי כי =

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בחוג R אין יחידה

הוכחה: אחרת נסמן אותה ב $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. צריך להתקיים לכל $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אבל

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שזה לא אפשרי (אם נבחר את $a_1 = 1$ זה גורר כי $b_2 = b_1$ אבל b_1 יכול להיות כמה אפשריות)

כיוון ש R ללא יחידה אז הוא אינו חוג עם חילוק.