בדידה תרגול 5

21 ביולי 2020

1 יחסי שקילות

1.1 הגדרה ודוגמאות

בתרגיל הקודם ראינו שהיחס $T \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ המוגדר ע"י:

$$xTy \iff x - y \in \mathbb{Z}$$

הינו יחס שקילות.

הגדרה: בהינתן קבוצה A ויחס שקילות $\sim$ מעליה. כלומר, $\sim \subseteq A \times A$, הוא רפלק', סימטרי וטרנ'. לכל $a \in A$ מחלקת השקרילות מוגדרת:

$$[a]_\sim = \{b \in A : a \sim b\}$$

וקבוצת המנה מוגדרת להיות:

$$A/_\sim = \{[a]_\sim : a \in A\}$$

מתקיים:

$$[a] = [b] \iff a \sim b$$

$$\forall a, b \in A : [a] = [b] \vee [a] \cap [b] = \emptyset$$

$$\forall a \in A : a \in [a]$$

$$[a] \cap [b] = \emptyset \iff a \nsim b$$

תרגילים:

1. נתבונן ביחס T מהדוגמא הקודמת. הוכיחו:

(א) $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow [x] \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(ב) לכל $x, y \in [0,1)$ שונים מתקיים: $[x] \cap [y] = \emptyset$.

(ג) לכל $x \in \mathbb{R}$ קיים $y \in [0,1)$ כך ש־ $[x] = [y]$.

פתרון: א. יהי $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, צ"ל: $[x] \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. איך מוכיחים הכלה? יהי $y \in [x]$. נב"ש $y \in \mathbb{Q}$. מהעובדה ש־ $y \in [x]$ נקבל $\exists a \in \mathbb{Z} : x - y = a$. לכן:

$$x = \underbrace{y}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{a}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Q}$$

כי סכום של רציונאליים הוא רציונאלי. בסתירה לכך ש־ $x \notin \mathbb{Q}$.

ב. יהיו $x, y \in [0,1)$ שונים. צ"ל $[x] \cap [y] = \emptyset$, ונעשה זאת ע"י להראות שאינם מתייחסים זה לזה: נניח בה"כ (בלי הגבלת הכלליות) $x < y$. לכן:

$$\underbrace{0 <}_{y > x} y - \underbrace{x <}_{y < 1} 1$$

ולכן נקבל $y - x \notin \mathbb{Z}$ ולכן $(x, y) \notin T$, ולכן $[x] \cap [y] = \emptyset$.

ג. בהינתן $x \in \mathbb{R}$ צריך למצוא $y \in [0,1)$ כך ש־ $[y] = [x]$. ניקח את $y = x - \lfloor x \rfloor$. צריך להוכיח שני דבריים:

1. $[x] = [y]$: כי נתבונן בהפרש: $x - y = x - (x - \lfloor x \rfloor) = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$.

2. $y \in [0,1)$. לפי הגדרת $\lfloor x \rfloor$ הוא השלם הגדול ביותר שקטן או שווה x ולכן כמובן $\lfloor x \rfloor \leq x \Rightarrow x - \lfloor x \rfloor \geq 0$. מאידך, $x - \lfloor x \rfloor < 1$ כי אם $x - \lfloor x \rfloor \geq 1$ אז $\lfloor x \rfloor + 1 \leq x$ בסתירה להגדרה של הערך השלם כשלם הגדול ביותר שקטן או שווה x.

הערה: בעזרת שתי הטענות האחרונות נוכל לכתוב את קבוצת המנה בצורה מצומצמת:

$$\mathbb{R}/T = \{[x] : x \in \mathbb{R}\} = \{[x] : x \in [0,1)\}$$

חלוקה: תהי A קבוצה לא ריקה. $\mathcal{F}$ תיקרא חלוקה של A אם $\mathcal{F} = \{A_i : i \in I\}$ כך ש:

- $\forall i \in I : A_i \subseteq A$
- $\forall i \in I : A_i \neq \emptyset$
- $\bigcup_{i \in I} A_i = A$
- $\forall i \neq j \in I : A_i \cap A_j = \emptyset$

המשפט: כל יחס שקילות $\sim$ משרה חלוקה על הקבוצה, והיא: $A/\sim$. וכן כל חלוקה $\{A_i : i \in I\}$ משרה יחס שקילות והוא: $a \sim b \iff \exists i : a \in A_i \wedge b \in A_i$ - יחס זה הוא שקילות ומקיים: $A/\sim = \{A_i : i \in I\}$.

תרגילים:

1. כמה יחסי שקילות שונים יש על הקבוצה $A = \{1, 2, 3\}$?

   פתרון: נראה כמה חלוקות שונות יש?

$$\{A\}$$

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$$

$$\{\{1\}, \{2, 3\}\}$$

$$\{\{2\}, \{1, 3\}\}$$

$$\{\{3\}, \{1, 2\}\}$$

   לכן יש חמש חלוקות שונות של A ולכן יש חמישה יחסי שקילות שונים על A.

2. על הקבוצה $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ נגדיר יחס $\sim$ באופן הבא:

$$(x, y) \sim (a, b) \iff x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

   באופן אחר:

$$\sim = \left\{((x, y), (a, b)) : x^2 + y^2 = a^2 + b^2\right\}$$

   (א) הוכיחו שזהו יחס שקילות.

   (ב) מצאו את מחלקת השקילות של $(0, 1)$.

   (ג) תארו גיאומטרית את קבוצת המנה.

   פתרון: א. רפלקסיביות: יהי $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, מתקיים: $x^2 + y^2 = x^2 + y^2$ ולכן $(x, y) \sim (x, y)$.

   סימטריות: נניח $(a, b) \sim (x, y)$ אז $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ ולכן $a^2 + b^2 = x^2 + y^2$ ולכן $(a, b) \sim (x, y)$

   טרנ׳: נניח $(a, b) \sim (x, y) \wedge (x, y) \sim (z, w)$ אז $a^2 + b^2 = x^2 + y^2 = z^2 + w^2$

ולכן מכלל המעבר לגבי שיוויון נקבל $(a,b)\sim(z,w)$.

ב.

$$[(0,1)]=\{(x,y):(x,y)\sim(0,1)\}=\{(x,y):x^2+y^2=0^2+1^2=1\}$$

שזה המעגל הקנוני ברדיוס 1.

ג. קבוצת המנה היא אוסף המעגלים הקנוניים ברדיוס $r\in[0,\infty)$.

3. $A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{2,3\}$. נגדיר יחס שקילות על $P(A)$ ע"י:

$$\forall X,Y\in P(A):X\sim Y\iff X\cup B=Y\cup B$$

מצאו את גודל קבוצת המנה.

פתרון: נתחיל בניסויים:

$$[\emptyset]=\{X\in P(A):X\cup B=\emptyset\cup B\}=\{\emptyset,\{2\},\{3\},\{2,3\}\}$$

$$[\{1\}]=\{X:X\cup B=\{1\}\cup B=\{1,2,3\}\}=\{\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$$

$$[\{5,3,4\}]=\{X:X\cup B=\{2,3,4,5\}=\{\{4,5\},\{2,4,5\},\{3,4,5\},\{2,3,4,5\}\}$$

אז כמה מחלקות שקילות שונות יש? המבדיל בין מחלקות שקילות שונות $[X].[Y]$ זה שהחיתוך $X\cap(A\setminus B)\neq Y\cap(A\setminus B)$ שונה. ולכן מספר המחלקות זה $|P(A\setminus B)|=2^3$.

הערה: ניתן לסכם בשתי טענות:

(א) אם $X,Y\in P(A\setminus B)$ שונים אז $[X]\cap[Y]=\emptyset$.

(ב) $\forall X\in P(A)\exists Y\in P(A\setminus B):[X]=[Y]$.