

תרגיל 5 - פתרון

שאלה 1 - טעם 1

1. לפי אינטגרציה בחלקים

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + c$$

2. לפי נוסחא טריגונומטרית

$$\int e^{2x} \sin^2 x dx = \int e^{2x} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int e^{2x} dx - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cos 2x dx = \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cos 2x dx$$

את האינטגרל שנשאר מוצאים בעזרת אינטגרציה בחלקים

$$\int e^{2x} \cos 2x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 2x + \int e^{2x} \sin 2x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 2x + \frac{1}{2} e^{2x} \sin 2x - \int e^{2x} \cos 2x dx$$

ולכן

$$\int e^{2x} \cos 2x dx = \frac{1}{4} e^{2x} \cos 2x + \frac{1}{4} e^{2x} \sin 2x$$

כלומר התשובה הסופית היא

$$\frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{8} e^{2x} \cos 2x + \frac{1}{8} e^{2x} \sin 2x + c$$

3.

$$\begin{aligned} \int x \sqrt[6]{2x+3} dx & \stackrel{\substack{t=2x+3 \\ dt=2dx}}{=} \int \frac{(t-3)}{2} \sqrt[6]{\frac{t}{2}} dt = \int \frac{t^{\frac{7}{6}}}{4} dt - \int \frac{3t^{\frac{1}{6}}}{4} dt \\ & = \frac{6}{13} \frac{t^{\frac{13}{6}}}{4} - \frac{6}{7} \frac{3t^{\frac{7}{6}}}{4} + c \end{aligned}$$

כלומר התשובה היא

$$\frac{6}{52} \sqrt[6]{(2x+3)^{13}} - \frac{18}{28} \sqrt[6]{(2x+3)^7}$$

4.

$$\int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{x - \sqrt{x+1} + 1} dx$$

נציב $t^2 = x+1$ ולכן $2t dt = dx$ ונקבל

$$\begin{aligned} \int \frac{t+2}{t^2-1-t+1} 2t dt & = 2 \int \frac{t+2}{t-1} dt = 2 \int 1 + \frac{3}{t-1} dt = \\ & = 2t + 6 \ln |t-1| + c = 2\sqrt{x+1} + 6 \ln |\sqrt{x+1} - 1| + c \end{aligned}$$

$$\int x^3 \sqrt{9 - x^2} dx$$

.5

נציב $t^2 = 9 - x^2$ כלומר

$$t dt = -x dx$$

ולכן האינטגרל הוא

$$\begin{aligned} \int x^3 \sqrt{9 - x^2} dx &= \int x^2 \sqrt{9 - x^2} x dx = \int (9 - t^2) t (-t dt) = - \int 9t^2 dt + \int t^4 dt \\ &= -3t^3 + \frac{1}{5}t^5 + c = -3(\sqrt{9 - x^2})^3 + \frac{1}{5}(\sqrt{9 - x^2})^5 + c \end{aligned}$$

$$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int \frac{1-2x+x^2}{x^2} dx = \int \left[\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1 \right] dx = -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + C \quad .6$$

$$\int \frac{e^x}{e^x + e^{\frac{x}{2}}} dx = \int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + 1} dx = \int \frac{2du}{u+1} = 2\ln|e^{\frac{x}{2}} + 1| + C \quad .7$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}} = \dots = \sqrt{2x-3} + C \quad .8$$

$$\int \sin(\ln(x)) dx \quad .9$$

$$\int \sin(\ln(x)) dx = x \sin(\ln(x)) - \int x \cos(\ln(x)) \frac{1}{x} dx = x \sin(\ln(x)) - \int \cos(\ln(x)) dx = \text{פתרון:}$$

$$= x \sin(\ln(x)) - \left[x \cos(\ln(x)) - \int -x \sin(\ln(x)) \frac{1}{x} dx \right] = \\ = x \sin(\ln(x)) - x \cos(\ln(x)) - \int \sin(\ln(x)) dx$$

$$\int \sin(\ln(x)) dx = \frac{1}{2} [x \sin(\ln(x)) - x \cos(\ln(x))] \quad \text{ולכן}$$

$$\int 2x \arctan x dx \quad .10$$

$$\int 2x \arctan x dx = x^2 \arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = x^2 \arctan x - \int \frac{-1+1+x^2}{1+x^2} dx = \text{פתרון:}$$

$$= x^2 \arctan x - \left[\int \frac{-1}{1+x^2} dx + \int dx \right] = x^2 \arctan x + \arctan x - x + C =$$

$$11. \int \sin^6 x \cdot \cos^2 x dx$$

פתרון:

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \sin^2 2x \quad \text{ולכן} \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{4} (1 - \cos 2x)^2 \quad \text{ולכן} \quad \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\int \sin^6 x \cos^2 x dx = \int \sin^4 x \sin^2 x \cos^2 x dx =$$

נכפיל את שתי המשוואות האחרונות לקבל

$$= \int \frac{1}{4} (1 - \cos 2x)^2 \frac{1}{4} \sin^2 2x dx = \frac{1}{16} \left[\int \sin^2 2x dx - \int 2 \cos 2x \sin^2 2x dx + \int \cos^2 2x \sin^2 2x dx \right]$$

נחשב כל אחד מן האינטגרלים:

$$\int \sin^2 2x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \sin 4x + C \quad \text{ולכן} \quad \cos 4x = \cos 2 \cdot 2x = 1 - 2 \sin^2 2x$$

ונקבל $dt = 2 \cos 2x dx$ ולכן $t = \sin 2x$, נבצע הצבה $\int 2 \cos 2x \sin^2 2x dx$

$$\int 2 \cos 2x \sin^2 2x dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + C = \frac{1}{3} \sin^3 2x + C$$

$$\cos 8x = 1 - 2 \sin^2 4x \quad \text{אבל} \quad \left(\frac{1}{2} \sin 4x \right)^2 = \cos^2 2x \sin^2 2x$$

$$\int \cos^2 2x \sin^2 2x dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 4x dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 8x) dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{64} \sin 8x + C$$

נציב את כל התוצאות האלה לקבל את התשובה הסופית.

(1) 2 exo

$$I_m = \int x^\alpha \ln^m x dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln^m(x) - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} m \cdot \ln^{m-1}(x) \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln^m(x) - \int \frac{x^\alpha}{\alpha+1} m \cdot \ln^{m-1}(x) dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln^m(x) - \frac{m}{\alpha+1} \cdot I_{m-1} + C$$

$$n=2 \text{ עבור } , \int \sin x dx = -\cos x + c \quad n=1 \text{ עבור } \quad (2)$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sin^n x dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x dx = \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x) dx = \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \left(\int \sin^{n-2} x dx - \int \sin^n x dx \right) = \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \Rightarrow \end{aligned}$$

$$I_n = \frac{1}{n} ((n-1) I_{n-2} - \cos x \sin^{n-1} x) : n > 2 \text{ עבור}$$