תרגיל 10 ־לינארית למורים

4 בפברואר 2017

שאלה 1

$S=\left\{\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\pi\\0\end{pmatrix}\right\}$, הראה ש־$S$ היא קבוצה אורתוגונאלת, הסק מכך שהיא מהווה בסיס למרחב $\mathbb{R}^3$.

פתרון:

$$<u,v>=-2+0+2=0$$

$$<u,w>=0+0+0=0$$

$$<v,w>=0+0+0=0$$

לפי טענה מההרצאה, אם יש לנו 3 וקטורים אורתוגונאליים ששונים מאפס אזי הם ב"ת ולכן משום שמימד של $\mathbb{R}^3$ הוא 3 אזי שלושה וקטורים ב"ת ב־$\mathbb{R}^3$ מהווים בסיס ל־$\mathbb{R}^3$.

שאלה 2

אם $v\in S^{\perp}$ אזי $v\in span\left(S\right)^{\perp}$(כלומר מספיק להיות מאונך לקבוצה פורשת)

פתרון:

יהי $u\in span\left(S\right)$ אזי $u=a_1v_1+\cdots+a_nv_n$ כאשר $S=\{v_1,...,v_n\}$.

$$<u,v>=<a_1v_1+\cdots+a_nv_n,v>=a_1<v_1,v>+\cdots+a_n<v_n,v>=$$
$$a_1\cdot 0+\cdots+a_n\cdot 0=0$$

ולכן $v\perp u$ ולכן $v\in\left(span\left(S\right)\right)^{\perp}$צ

שאלה 3

יהיו $u=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $S=\{u,v\}$.

מצאו בסיס ל-$S^\perp$.

פתרון:

יהי $w=(x,y,z)$

$< w,u >= x+y=0$

$< w,v >= x+y+z=0$

ולכן $x=y$, $2x=-z$ ולכן פתרון למערכת ההומוגנית הזאת הוא מהצורה $= \begin{pmatrix} x \\ x \\ -2x \end{pmatrix}$

$x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, ולכן בסיס למרחב $S^\perp$ הוא

$span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$.

שאלה 4

תהי $v=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$, $u=(1,2,3,4,5)$, $w=(1,2,3,3,2)$. תמצא את כל הוקטורים שאורתוגונאלים ל-$S=\{u,v,w\}$.

פתרון:

$p=\begin{pmatrix} x & y & z & t & s \end{pmatrix}$

$< p,w >= x+2y+3z+3t+2s=0$

$< p,u >= x+2y+3z+4t+5s=0$

$< p,v >= 2x+3y+4z+t+5s=0$

ולכן בסיס למרחב הפתרונות של המערכת הזאת מהווה בסיס למרחב של כל הווקטורים אשר אורתוגונאליים ל-S.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

לאחר דירוג של מטריצה מקבלים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ולכן $y = 4s - 2z$, $t = -3s$, $x = z - s$ ולכן:

$$\begin{pmatrix} z-s \\ 4s-2z \\ z \\ -3s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -s \\ 4s \\ 0 \\ -3s \\ s \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ולכן מרחב כל הווקטורים אשר אורתוגונאליים ל-S הוא:

$$span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

שאלה 5

הוכיחו את משפט פיתגורס: יהיו שני וקטורים v_1, v_2 אורתוגונאילים זה לזה אזי, $\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$.

הדרכה: התבוננו בביטוי הבא:

$$\|v_1 + v_2\|^2 = < v_1 + v_2, v_1 + v_2 >$$

פתרון:

$< v_1 + v_2, v_1 + v_2 > = < v_1, v_1 > + < v_2, v_2 > + < v_2, v_1 > + < v_2, v_2 > =$

$\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$ כי $< v_1, v_2 > = < v_2, v_1 > = 0$ כי לפי הנתון v_1, v_2 אורתוגונאילים.

שאלה 6

תזכורת:

יהיו $v_1, v_2, .., v_n$ בסיס אורתוגונאלי של מרחב W אזי עבור כל $w \in W$, אזי $w = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{<v_i,w>}{\|v_i\|^2} \cdot v_i$, כלומר כל w הוא צירוף לינארי עם קטורי הבסיס האורתונורמלי עם מקדמים $\frac{<v_i,w>}{\|v_i\|^2}$ של v_i.

חזרה לשאלה:

בהינתן 3 וקטורים $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = (2, 1, -4)$, $v_3 = (3, -2, 1)$, ונניח שנתון $w = (1, 5, 12)$, הוכח ש-$\{v_1, v_2, v_3\}$ היא קבוצה אורתונורמלית, הסק מכך שהיא מהווה בסיס למרחב $\mathbb{R}^3$, ובעזרת התזכורת הצג את w כצירוף לינארי של v_1, v_2, v_3 (רמז: תמצא את המקדמים של הצירוף בעזרת הנוסחה מהתזכורת)

פתרון:

באותה דרך, כמו מקודם מוכיחים ש-v_1, v_2, v_3 מהווים קבוצה אורתוגונאלית, ולכן הם בת"ל ולכן הם בסיס ל-$\mathbb{R}^3$. כדי להציג את w כצירוף לינארי שלשהם נמצא את המקדמים בעזרת נוסחה שכתובה בתזכורת:

מקדם של v_1 בצירוף הוא:

$$a_1 = \frac{<v_1,w>}{\|v_1\|^2} = \frac{1+2\cdot5+1\cdot12}{1+4+1} = \frac{22}{6} = \frac{11}{3}$$

מקדם של v_2 :

$$a_2 = \frac{<v_2,w>}{\|v_2\|^2} = \frac{2+5-2\cdot12}{4+1+16} = -\frac{41}{21}$$

מקדם של v_3:

$$a_3 = \frac{<v_3,w>}{\|v_3\|^2} = \frac{3-2\cdot5+12}{9+4+1} = \frac{5}{14}$$

ולכן $w = \frac{11}{3}v_1 - \frac{41}{24}v_2 + \frac{5}{14} \cdot v_3$

שאלה 7

הראה שהוקטורים $(x-y)$, $(x+y)$ אורתוגונאילים אם ורק אם $\|x\| = \|y\|$.

פתרון:

$<x+y, x-y>= 0$ אם ורק אם

$<x,x> + <y,x> + <x,-y> + <y,-y>= 0$ אם ורק אם

$\|x\|^2 + <x,y> - <x,y> - \|y\|^2 = 0$ אם ורק אם

$\|x\|^2 = \|y\|^2$

שאלה 8

מצא קבוצה של כל הוקטורים אשר אורתוגונאליים לוקטורים $(1,1,1)$ ו-$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, כזכור קבוצה זו מהווה תת מרחב של $\mathbb{R}^3$, מצא בסיס לתת מרחב זה והשלם אותו עד לבסיס למרחב $\mathbb{R}^3$.

(רמז: עוד וקטורים בת"ל כך שאיחוד של איברי הסיס של תת מרחב הנ"ל עם הווקטורים האלה יהיה בסיס למרחב $\mathbb{R}^3$).

פתרון:

כמו תמיד כדי למצוא בסיס למרחב הניצב לווקטורים הנתונהים הוא פתרון של מערכת הומוגנית הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

לאחר דירוג נקבל:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ולכן פתרון למערכת הזאת הוא מהצורה: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ ולכן בסיס למרחב הניצב הוא הוקטור $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, אם נוסיף לבסיס הזה עוד שני וקטורים $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ולכן נקבל בסיס אורתונורימלי ל-$\mathbb{R}^3$.

שאלה 9

נתונים הוקטורים

$u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, נסמן ב-$W$ אוסף כל הווקטורים של $\mathbb{R}^5$ שניצבים לווקטורים הנתונים:

א) הראה ש-W תת מרחב ווקטורי.

פתרון:

ברור ש-$0 \in W$ כי 0 אורתוגונאילי לכל וקטור ב-$\mathbb{R}^5$.

יהיו $w_1, w_2 \in W$, נרצה להראות ש־$w = aw_1 + w_2$, נרצה להראות ש־$w \in W$.

$$< u, w >=< u, aw_1 + w_2 >= a < u, w_1 > + < u, w_2 >= 0$$

$$< v, w >=< u, aw_1 + w_2 >= a < u, w_1 > + < u, w_2 >= 0$$

ב) מצא בסיס ומימד עבור W.

כדי למצוא את הבסיס והמימד, נמצא בסיס למרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

לאחר דירוג נקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$y - \frac{1}{2}z - t + \frac{3}{2}s = 0$$

$$x - \frac{3}{2}z + t - \frac{1}{2}z = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}z - t + \frac{1}{2}s \\ \frac{1}{2}z + t - \frac{3}{2}s \\ z \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s \\ -\frac{3}{2}s \\ 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$s \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ ולכן:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ זהוא בסיס ל-W והמימד שלו הוא 3