בס"ד

זהבית צבי


# פתרון תרגיל בית 11 פונקציות מרוכבות מתמטיקה

## שאלה 1

חשבו את האינטגרל:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+4}\,dx$$

## פתרון

מדובר באינטגרל מהצורה –

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos ax\,dx$$

כאשר $p, q$ פולינומים.

$$p(x) = 1\,, q(x) = x^2 + 4$$

נסמן:

$$f(x) = \frac{\cos x}{x^2+4}$$

האפסים של $q$ הם: $\pm 2i$ אינם על הציר הממשי.

כלומר, $q(x) \neq 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$. הדרגות של הפולינומים בהתאמה:

$$\deg(p) = 0, \deg(q) = 2$$

לכן מתקיים –

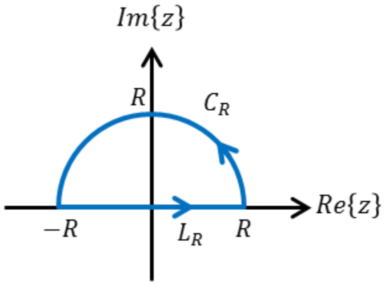
$$\deg(q) \geq \deg(p) + 1$$

כלומר האינטגרל מתכנס בהחלט ואפשר לחשב אותו.

נגדיר $z \in \mathbb{C}$. כעת –

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+4}$$

המסלול הנבחר הוא חצי מעגל במישור העליון $Im(z) > 0$ ברדיוס $R > 0$, המסומן $C_R$, וקו ישר על הציר הממשי, המסומן $L_R$. סה"כ קיבלנו מסלול סגור כמתואר בציור:




מסלול זה חוסם/מגדיר חצי עיגול $\overline{D_R}$ המכיל את הנקודות הסינגולריות של $g(z)$ בחצי המישור העליון. $g(z)$ מנה של פונקציות שלימות והמכנה שלה מתאפס כאשר:

$$z_{1,2} = \pm 2i$$

בחצי המישור העליון הנקודה הסינגולרית היחידה היא: $2i$. לכן נקבל:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \underbrace{=}_{\substack{\text{המעבר נכון כי} \\ Img(z) \text{ אי זוגית}}} \lim_{R\to\infty} \int_{L_R} g(z)dz = \lim_{R\to\infty} Re\left(\int_{L_R+C_R} g(z)dz - \int_{C_R} g(z)dz\right)$$

לפי למת ז'ורדן:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} g(z)dz = 0$$

מגיעים לאינטגרל:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} Re\left(\int_{L_R+C_R} g(z)dz\right)$$

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+4} = \frac{e^{iz}}{(z+2i)(z-2i)}$$

לכן –

$$Re\left(\int_{L_R+C_R} g(z)dz\right) = Re[2\pi i\, Res(g(z), 2i)]$$

בנקודה $z = 2i$ יש לפונקצי'ה קוטב פשוט ולכן השארית היא:

$$Res(g(z), 2i) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)g(z) = \frac{e^{i\cdot 2i}}{4i} = \frac{1}{4ie^2}$$

לכן –

$$Re\left(\int_{L_R+C_R} g(z)dz\right) = Re\left(2\pi i \cdot \frac{1}{4ie^2}\right) = Re\left(\frac{\pi}{2e^2}\right) = \frac{\pi}{2e^2}$$

זהבית צבי


תשובה סופית:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+4}dx=\frac{\pi}{2e^2}$$

## **<u>שאלה 2</u>**

חשבו את האינטגרל: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x+\sin 2x}{x^4+5x^2+4}dx$

**<u>פתרון</u>**

כאן נרשום את האינטגרל כסכום של שני אינטגרלים:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x+\sin 2x}{x^4+5x^2+4}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x}{x^4+5x^2+4}dx+\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^4+5x^2+4}dx}_{0}$$

האינטגרל השני הוא 0 מכיוון שזה אינטגרל של פונקציה אי-זוגית בקטע סימטרי שווה אפס.

את האינטגרל הראשון נחשב לפי השיטה שלמדנו.

מדובר באינטגרל מהצורה $a>0$ , $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)\cos ax}{q(x)}dx$ כאשר $p,q$ פולינומים:

$p(x)=1,\ q(x)=x^4+5x^2+4$.

נסמן : $f(x)=\dfrac{\cos 3x}{x^4+5x^2+4}$.

את הפולינום $q$ נוכל לפרק למכפלה של גורמים לינאריים מעל המרוכבים כך:

נסמן $t=x^2$ ונקבל: $x^4+5x^2+4=t^2+5t+4$. שורשי המשוואה הריבועית $t^2+5t+4=0$ הם: $t_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\dfrac{-5\pm 3}{2}\Rightarrow t_1=-4,\ t_2=-1$ ולכן

לכן, יש שתי אפשרויות עבור $x^2$:

$$(1)\ x^2=-4\Rightarrow x_{1,2}=\pm 2i$$

$$(2)\ x^2=-1\Rightarrow x_{3,4}=\pm i$$

לכן: $x^4+5x^2+4=(x^2+4)(x^2+1)=(x+2i)(x-2i)(x+i)(x-i)$.

האפסים של $q$ הם $\pm i,\ \pm 2i$ אינם על הציר הממשי, כלומר $q(x)\neq 0$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

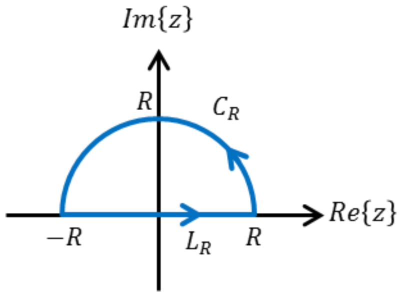
הדרגות (המעלות) של הפולינומים הן בהתאמה: $\deg(q)=4$ , $\deg(p)=0$ , לכן

זהבית צבי


מתקיים התנאי: $\deg(q) \geq \deg(p) + 1$, כלומר האינטגרל מתכנס בהחלט ואפשר לחשב אותו.

נגדיר $z \in £$ , $g(z) = \dfrac{e^{3iz}}{z^4 + 5z^2 + 4} = \dfrac{e^{3iz}}{(z^2+4)(z^2+1)}$ .

המסלול הנבחר הוא חצי מעגל במישור העליון $Im(z) > 0$ ברדיוס $R > 0$ המסומן $C_R$ , וקו ישר על הציר הממשי המסומן $L_R$ , סה"כ קיבלנו מסלול סגור. כפי שמתואר באיור הבא:




מסלול זה חוסם (מגדיר) חצי עיגול סגור $\overline{D_R}$ המכיל את הנקודות הסינגולריות של $g(z)$ בחצי המישור העליון. הנקודות הסינגולריות בתחום זה הן: $i , 2i$ .

לכן נקבל:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \underbrace{=}_{\substack{\text{מטעמי אי זוגיות} \\ \text{של } Img(z)}} \lim_{R\to\infty} \int_{L_R} g(z)dz = \lim_{R\to\infty} Re\left(\int_{L_R+C_R} g(z)dz - \int_{C_R} g(z)dz\right)$$

לפי למת ז'ורדן: $\lim\limits_{R\to\infty} \mathbf{Re} \int\limits_{C_R} g(z)dz = 0$ .

מכאן: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{R\to\infty} \mathbf{Re}\left(\int\limits_{L_R+C_R} g(z)dz\right)$ .

המסלול סגור ולכן ניתן לחשב אינטגרל זה לפי משפט השארית:

כאשר אנו יודעים כי $g(z)$ אנליטית ב- $\overline{D_R}$ , פרט לנקודות הסינגולריות ב $D_R$ : $i , 2i$ .

נרשום: $g(z) = \dfrac{e^{3iz}}{(z^2+4)(z^2+1)} = \dfrac{e^{3iz}}{(z+2i)(z-2i)(z+i)(z-i)}$ .

הנק' הסינגולריות $i , 2i$ הן קטבים מסדר פשוט.

לכן, לפי משפט השארית נקבל:

זהבית צבי


$$\mathbf{Re}\int\limits_{L_R+C_R} g(z)dz=\mathbf{Re}\left[2\pi i\left(\mathbf{Res}\left(g(z),i\right)+\mathbf{Res}\left(g(z),2i\right)\right)\right]$$

נחשב את השאריות לפי מקרה פרטי 1 בדף סיכום 10(שארית בקוטב פשוט):

עבור $z_0=i$:

$$\mathbf{Res}\left(g(z),i\right)=\lim_{z\to i}(z-i)g(z)=\lim_{z\to i}\cancel{(z-i)}\frac{e^{3iz}}{\underbrace{(z+2i)(z-2i)}_{(z^2+4)}(z+i)\cancel{(z-i)}}$$

כעת, אין בעיה להציב $z_0=i$ ונקבל:

$$=\frac{e^{-3}}{3\cdot 2i}=\frac{1}{6e^3 i}$$

עבור $z_0=2i$:

$$\mathbf{Res}\left(g(z),2i\right)=\lim_{z\to 2i}(z-2i)g(z)=\lim_{z\to 2i}\cancel{(z-2i)}\frac{e^{3iz}}{(z+2i)\cancel{(z-2i)}\underbrace{(z+i)(z-i)}_{z^2+1}}$$

כעת, אין בעיה להציב $z_0=2i$ ונקבל:

$$=\frac{e^{-6}}{(-3)\cdot 4i}=-\frac{1}{12e^6 i}$$

סה"כ נקבל:

$$\mathbf{Re}\int\limits_{L_R+C_R} g(z)dz=\mathbf{Re}\left[2\pi i\left(\mathbf{Res}\left(g(z),i\right)+\mathbf{Res}\left(g(z),2i\right)\right)\right]=\mathbf{Re}\left[2\pi i\left(\frac{1}{6e^3 i}-\frac{1}{12e^6 i}\right)\right]=$$

.

$$=\mathbf{Re}\left[\pi\left(\frac{1}{3e^3}-\frac{1}{6e^6}\right)\right]=\frac{\pi\left(2e^3-1\right)}{6e^6}$$

סה"כ נקבל: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x}{x^4+5x^2+4}dx=\frac{\pi\left(2e^3-1\right)}{6e^6}$

והתשובה הסופית: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x+\sin 2x}{x^4+5x^2+4}dx=\frac{\pi\left(2e^3-1\right)}{6e^6}+0=\frac{\pi\left(2e^3-1\right)}{6e^6}$

## <u>שאלה 3</u>

לחשב את האינטגרל –

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+9}dx$$

**<u>פתרון:</u>**

מדובר באינטגרל מהצורה –

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin ax \, dx$$

כאשר $p, q$ פולינומים.

$$p(x) = x \,, q(x) = x^2 + 9$$

נסמן:

$$f(x) = \frac{x \sin x}{x^2 + 9}$$

האפסים של $q$ הם: $\pm 3i$ אינם על הציר הממשי.

כלומר, $q(x) \neq 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$. הדרגות של הפולינומים בהתאמה:

$$\deg(p) = 1, \deg(q) = 2$$

לכן מתקיים –

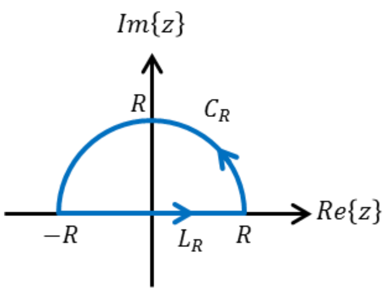
$$\deg(q) \geq \deg(p) + 1$$

כלומר האינטגרל מתכנס ואפשר לחשב אותו.

נגדיר $z \in \mathbb{C}$. כעת –

$$g(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 + 9}$$

המסלול הנבחר הוא חצי מעגל במישור העליון $Im(z) > 0$ ברדיוס $R > 0$, המסומן $C_R$, וקו ישר על הציר הממשי, המסומן $L_R$. סה"כ קיבלנו מסלול סגור כמתואר בציור:




מסלול זה חוסם/מגדיר חצי עיגול $\overline{D_R}$ המכיל את הנקודות הסינגולריות של $g(z)$ בחצי המישור העליון. $g(z)$ מנה של פונקציות שלימות והמכנה שלה מתאפס כאשר:

$$z_{1,2} = \pm 3i$$

בחצי המישור העליון הנקודה הסינגולרית היחידה היא: $3i$. לכן נקבל:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \underbrace{=}_{\substack{\text{המעבר נכון כי} \\ Reg(z) \text{ אי זוגית}}} \lim_{R\to\infty}\int_{L_R} g(z)dz = \lim_{R\to\infty} Im\left(\int_{L_R+C_R} g(z)dz - \int_{C_R} g(z)dz\right)$$

לפי למת ז'ורדן:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} g(z)dz = 0$$

מגיעים לאינטגרל:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} Im\left(\int_{L_R+C_R} g(z)dz\right)$$

$$g(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2+9} = \frac{ze^{iz}}{(z-3i)(z+3i)}$$

לכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = \lim_{R\to\infty} Im \oint_{L_R} g(z)dz = Im\big(2\pi i\, Res(f(z), 3i)\big)$$

נחשב את השארית לפי קוטב מסדר ראשון – מקרה 1 בדף סיכום

$$\lim_{z\to 3i}(z-3i)\frac{ze^{iz}}{(z-3i)(z+3i)} = \frac{1}{2e^3}$$

התשובה הסופית:

$$I = Im\left(2\pi i \cdot \frac{1}{2e^3}\right) = \frac{\pi}{e^3}$$

**<u>שאלה 4</u>**

חשבו את האינטגרל הבא:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\cos 3x}{(x^2+4)(x^2+1)}dx$$

**<u>פתרון</u>**

מדובר באינטגרל מהצורה –

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos ax \, dx$$

כאשר $p, q$ פולינומים.

$$p(x) = x^2 \, , q(x) = (x^2 + 4)(x^2 + 1)$$

נסמן:

$$f(x) = \frac{x^2 \cos 3x}{(x^2 + 4)(x^2 + 1)}$$

האפסים של $q$ הם: $\pm i, \pm 2i$ אינם על הציר הממשי.

כלומר, $q(x) \neq 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$. הדרגות של הפולינומים בהתאמה:

$$\deg(p) = 2, \deg(q) = 4$$

לכן מתקיים –

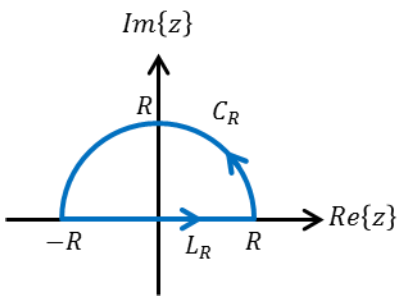
$$\deg(q) \geq \deg(p) + 1$$

כלומר האינטגרל מתכנס ואפשר לחשב אותו.

נגדיר $z \in \mathbb{C}$. כעת –

$$g(z) = \frac{z^2 e^{3iz}}{(z^2 + 4)(z^2 + 1)}$$

המסלול הנבחר הוא חצי מעגל במישור העליון $Im(z) > 0$ ברדיוס $R > 0$, המסומן $C_R$, וקו ישר על הציר הממשי, המסומן $L_R$. סה"כ קיבלנו מסלול סגור כמתואר בציור:




מסלול זה חוסם/מגדיר חצי עיגול $\overline{D_R}$ המכיל את הנקודות הסינגולריות של $g(z)$ בחצי המישור העליון. $g(z)$ מנה של פונקציות שלימות והמכנה שלה מתאפס כאשר:

$$z_{1,2} = \pm 2i \, , z_{3,4} = \pm i$$

בחצי המישור העליון הנקודות הסינגולריות הן: $i, 2i$. לכן נקבל:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \underbrace{=}_{\substack{\text{מטעמי אי זוגיות} \\ Img(z) \text{ של}}} \lim_{R\to\infty}\int_{L_R} g(z)dz = \lim_{R\to\infty} Re\left(\int_{L_R+C_R} g(z)dz - \int_{C_R} g(z)dz\right)$$

לפי למת ז'ורדן:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} g(z)dz = 0$$

מגיעים לאינטגרל:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} Re\left(\int_{L_R+C_R} g(z)dz\right)$$

$$g(z) = \frac{z^2e^{3iz}}{(z^2+1)(z^2+4)} = \frac{z^2e^{3iz}}{(z+2i)(z-2i)(z+i)(z-i)}$$

לכן –

$$Re\left(\int_{L_R+C_R} g(z)dz\right) = Re[2\pi i\ Res(g(z),i) + 2\pi i\ Res(g(z),2i)]$$

נחשב את השארית בנקודה $z=i$:

ב – $i$ יש קוטב פשוט –

$$Res(g(z),i) = \lim_{z\to i}(z-i)g(z) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{z^2e^{3iz}}{(z+2i)(z-2i)(z+i)(z-i)} = \frac{-e^{-3}}{3\cdot 2i} = \frac{-1}{6ie^3}$$

עבור $z=2i$:

$$Res(g(z),2i) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)g(z) = \frac{1}{3ie^6}$$

לכן –

$$Re\left(\int_{L_R+C_R} g(z)dz\right) = Re\left(2\pi i\left[-\frac{1}{6e^3i}+\frac{1}{3e^6i}\right]\right) = Re\left[\pi\left(-\frac{1}{3e^3}+\frac{2}{3e^6}\right)\right] = \frac{(2-e^3)\pi}{3e^6}$$

תשובה סופית:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\cos 3x}{(x^2+4)(x^2+1)}dx = \frac{(2-e^3)\pi}{3e^6}$$

**<u>שאלה 5</u>**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos 3x}{(x^2+4)^2} dx$$

**<u>פתרון</u>**

מדובר באינטגרל מהצורה –

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos ax \, dx$$

כאשר $p, q$ פולינומים.

$$p(x) = x^2 \, , q(x) = (x^2+4)^2$$

נסמן:

$$f(x) = \frac{x^2 \cos 3x}{(x^2+4)^2}$$

האפסים של $q$ הם: $\pm 2i$ אינם על הציר הממשי.

כלומר, $q(x) \neq 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$. הדרגות של הפולינומים בהתאמה:

$$\deg(p) = 2, \deg(q) = 4$$

לכן מתקיים –

$$\deg(q) \geq \deg(p) + 1$$

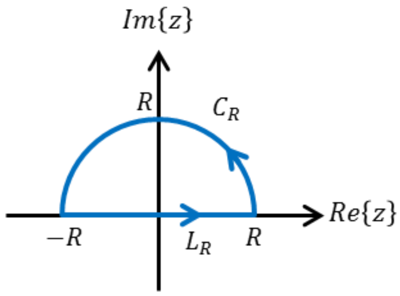
כלומר האינטגרל מתכנס ואפשר לחשב אותו.

נגדיר

זהבית צבי


$$g(z)=\frac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)^2}$$

המסלול הנבחר הוא חצי מעגל במישור העליון $Im(z)>0$ ברדיוס $R>0$, המסומן $C_R$, וקו ישר על הציר הממשי, המסומן $L_R$. סה"כ קיבלנו מסלול סגור כמתואר בציור:




מסלול זה חוסם/מגדיר חצי עיגול $\overline{D_R}$ המכיל את הנקודות הסינגולריות של $g(z)$ בחצי המישור העליון. $g(z)$ מנה של פונקציות שלימות והמכנה שלה מתאפס כאשר:

$$z_{1,2}=\pm 2i$$

בחצי המישור העליון הנקודה הסינגולרית היחידה היא $2i$. לכן נקבל:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx\underbrace{=}_{\text{מטעמי אי זוגיות של } Img(z)}\lim_{R\to\infty}\int_{L_R}g(z)dz=\lim_{R\to\infty}Re\left(\int_{L_R+C_R}g(z)dz-\int_{C_R}g(z)dz\right)$$

לפי למת ז'ורדן:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}g(z)dz=0$$

מגיעים לאינטגרל:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\lim_{R\to\infty}Re\left(\int_{L_R+C_R}g(z)dz\right)$$

כאשר

$$g(z)=\frac{z^2e^{3iz}}{(z+2i)^2(z-2i)^2}$$

מכיוון שהמונה לא מתאפס בנקודה $z=2i$ והמכנה מתאפס בנקודה זו מסדר 2, מדובר בקוטב מסדר 2 של $g(z)$.

לפי נוסחה לחישוב שארית בקוטב מסדר גבוה, מקרה 3 בדף סיכום 10, נגדיר:

$$h(z)=(z-2i)^2g(z)=\frac{z^2e^{3iz}}{(z+2i)^2}$$

ונקבל

$$Res(g(z),2i)=\lim_{z\to 2i}\frac{h'(z)}{1!}=-\frac{5}{8e^6i}$$

לכן בסה"כ:

$$Re\left(\int_{L_R+C_R}g(z)dz\right)=Re\big(2\pi i\ Res(g(z),2i)\big)=Re\left(2\pi i\cdot-\frac{5}{8e^6i}\right)=-\frac{5\pi}{4e^6}$$

תשובה סופית:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\cos 3x}{(x^2+4)^2}dx=-\frac{5\pi}{4e^6}$$

**<u>שאלה 6</u>**

חשבו את האינטגרל: $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos^2 x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$

**<u>פתרון</u>**

נשתמש בזהות הטריגונומטרית:

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1\Rightarrow \cos^2 x=\frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)$$

לכן

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+\cos 2x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\frac{1}{2}\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx}_{I_1}+\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{\left(1+x^2\right)^2}dx}_{I_2}\right]$$

תחילה נחשב את $I_1$:

זהו אינטגרל מהצורה $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}dx$ כאשר $p,q$ פולינומים.

כאן $q(x)=\left(1+x^2\right)^2$ , $p(x)=1$ . נסמן $f(x)=\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}$ .

זהבית צבי


הדרגות (המעלות) של הפולינומים הן בהתאמה: $\mathbf{deg}(q)=4$ , $\mathbf{deg}(p)=0$ , לכן מתקיים התנאי: $\mathbf{deg}(q)\ge\mathbf{deg}(p)+2$, כלומר האינטגרל מתכנס בהחלט ואפשר לחשב אותו.

האפסים של $q$ הם $\pm i$ (בריבוי 2) אינם על הציר הממשי, כלומר $q(x)\neq 0$ לכל $x\in\mathbb{R}$ .

נגדיר $z\in\mathbb{C}$ , $f(z)=\dfrac{1}{\left(1+z^2\right)^2}$ וניקח מסלול סגור בחצי המישור העליון $\mathbf{Im}\,z>0$ , $L_R+C_R$ , כאשר $C_R$ הינו חצי מעגל קנוני (סביב 0) ברדיוס $R>0$ מספיק גדול מנקודה $R$ לנקודה $-R$ ו- $L_R$ הוא קטע על הציר הממשי מנקודה $-R$ לנקודה $R$ . מסלול זה חוסם (מגדיר) חצי עיגול סגור $\overline{D_R}$ המכיל את הנקודה הסינגולרית של $f(z)$ בחצי המישור העליון, הנקודה $i$.

אנו מקבלים כי: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\lim_{R\to\infty}\int_{L_R} f(x)dx=\lim_{R\to\infty}\left(\int_{L_R} f(z)dz\right)$

$$=\lim_{R\to\infty}\left(\oint_{C_R+L_R} f(z)dz-\int_{C_R} f(z)dz\right)$$

$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz=0$ . (מדוע?)

מכאן: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\oint_{C_R+L_R} f(z)dz$ .

את האינטגרל באגף ימין נחשב לפי משפט השארית, כאשר אנו יודעים כי $f(z)$ אנליטית ב- $\overline{D_R}$, פרט לנקודה הסינגולרית $i$. מכוון שניתן לרשום $f(z)=\dfrac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}$ , מקבלים כי נקודה זו היא קוטב מסדר 2 של $f(z)$ , כי היא לא מאפסת את המונה, ומאפסת את המכנה מסדר 2. לפי משפט השארית נקבל:

$$\oint_{C_R+L_R} f(z)dz=2\pi i\,\mathbf{Res}\big(f(z),i\big)$$

נחשב את השארית לפי מקרה פרטי 3 בדף סיכום (שארית בקוטב מסדר $n\ge 2$):

תזכורת: $\mathbf{Re}\,s\left(f(z),z_0\right)=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{g^{(n-1)}(z)}{(n-1)!}$

נגדיר: $\frac{1}{(z+i)^2}=\frac{1}{(z+i)^2\cancel{(z-i)^2}}\cancel{(z-i)^2}\ f(z)=(z-i)^2=g(z)$ ונקבל:

$$\mathbf{Re}\,s\left(f(z),i\right)=\lim_{z\to 4i}\frac{g'(z)}{(2-1)!}\underset{(*)}{=}\lim_{z\to i}\frac{-2}{(z+i)^3}=\frac{-2}{-8i}=\frac{1}{4i}$$

מכאן נקבל: $\oint\limits_{C_R+L_R} f(z)dz=2\pi i\frac{1}{4i}=\frac{\pi}{2}$ .

לכן

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\oint\limits_{C_R+L_R} f(z)dz=\frac{\pi}{2}$$

כעת נחשב את $I_2$:

זהו אינטגרל מהצורה $a>0$ , $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)\cos ax}{q(x)}dx$ כאשר $p,q$ פולינומים.

כאן $q(x)=\left(1+x^2\right)^2$ , $p(x)=1$ . נסמן $f(x)=\frac{\cos 2x}{\left(1+x^2\right)^2}$ .

הדרגות (המעלות) של הפולינומים הן בהתאמה: $\mathbf{deg}(q)=4$ , $\mathbf{deg}(p)=0$ , לכן

מתקיים התנאי:

$$\deg(q)\geq\deg(p)+1$$

כלומר האינטגרל מתכנס בהחלט ואפשר לחשב אותו.

האפסים של $q$ הם $\pm i$ (בריבוי 2) אינם על הציר הממשי, כלומר $q(x)\neq 0$ לכל $x\in\mathbb{R}$ .

נגדיר $z\in\mathbb{C}$ , $f(z)=\frac{e^{2iz}}{\left(1+z^2\right)^2}$ וניקח מסלול סגור <u>בחצי המישור העליון</u> $\mathbf{Im}\,z>0$ ,

$L_R+C_R$ , כאשר $C_R$ הינו חצי מעגל קנוני (סביב 0) ברדיוס $R>0$ מספיק

גדול מנקודה $R$ לנקודה $-R$ ו- $L_R$ הוא קטע על הציר הממשי מנקודה $-R$ לנקודה $R$

מסלול זה חוסם (מגדיר) חצי עיגול סגור $\overline{D_R}$ המכיל את הנקודה הסינגולרית של $f(z)$ בחצי המישור העליון, הנקודה $i$.

אנו מקבלים כי: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_{L_R} f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\mathrm{Re}\left(\int_{L_R} f(z)dz\right)$

$$= \lim_{R\to\infty}\mathrm{Re}\left(\oint_{C_R+L_R} f(z)dz - \int_{C_R} f(z)dz\right)$$

השוויון הראשון נכון כי
$Img(z)$ אי זוגית

לפי למת ז'ורדן: $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\mathrm{Re}\int_{C_R} f(z)dz = 0$.

מכאן: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \mathrm{Re}\left(\oint_{C_R+L_R} f(z)dz\right)$.

את האינטגרל באגף ימין נחשב לפי משפט השארית, כאשר אנו יודעים כי $f(z)$ אנליטית ב- $\overline{D_R}$, פרט לנקודה הסינגולרית $4i$. מכוון שניתן לרשום $f(z) = \dfrac{e^{2iz}}{(z+i)^2(z-i)^2}$,

מקבלים כי נקודה זו היא קוטב

מסדר 2 של $f(z)$, כי היא לא מאפסת את המונה, ומאפסת את המכנה

מסדר 2. לפי משפט השארית נקבל:

$$\oint_{C_R+L_R} f(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(f(z), i\right)$$

נחשב את השארית לפי מקרה פרטי 3 בדף סיכום (שארית בקוטב מסדר $n \ge 2$):

<u>תזכורת:</u> $\displaystyle\mathrm{Res}\left(f(z), z_0\right) = \lim_{z\to z_0}\frac{g^{(n-1)}(z)}{(n-1)!}$

נגדיר: $\displaystyle g(z) = (z-i)^2 f(z) = \cancel{(z-i)^2}\frac{e^{2iz}}{(z+i)^2\cancel{(z-i)^2}} = \frac{e^{2iz}}{(z+i)^2}$ ונקבל:

$$\mathrm{Res}\left(f(z), i\right) = \lim_{z\to 4i}\frac{g'(z)}{(2-1)!} \underset{(*)}{=} \lim_{z\to i}\frac{2ie^{2iz}(z+i) - 2e^{2iz}}{(z+i)^3}$$

$$g'(z)=\frac{2ie^{2iz}(z+i)^2-e^{2iz}\cdot 2(z+i)}{(z+i)^4}=\frac{2ie^{2iz}(z+i)-2e^{2iz}}{(z+i)^3}\quad (*)$$

אין בעיה בגבול האחרון, לכן ניתן להציב ונקבל:

$$=\frac{-4e^{-2}-2e^{-2}}{-8i}=\frac{3}{4e^2i}$$

מכאן נקבל: $\oint\limits_{C_R+L_R} f(z)dz=2\pi i\frac{3}{4e^2 i}=\frac{3\pi}{2e^2}$.

לכן

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{(1+x^2)^2}dx=\mathrm{Re}\left(\oint\limits_{C_R+L_R} f(z)dz\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{3\pi}{2e^2}\right)=\frac{3\pi}{2e^2}$$

ובסה"כ:

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+\cos 2x}{(1+x^2)^2}dx=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2e^2}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4e^2}$$

**<u>שאלה 7</u>**

קבעו כמה אפסים כולל ריבוי יש לפונקצי'ה $h(z)=9z^5e^z-2z^3+1$ בעיגול $B(0,1)$.

**<u>פתרון</u>**

הפונקציה $h(z)$ אנליטית ב-$\overline{B(0,1)}$.

נבחר $g(z)=9z^5e^z$, $f(z)=-2z^3+1$.

נראה שעל שפת העיגול $B(0,1)$, כלומר על מעגל היחידה $\gamma:|z|=1$ מתקיי'ם $|f(z)|<|g(z)|$, כלומר $g$ תהי'ה הדומיננטית ב-$\gamma$.

נשים לב ש:

לפי אי שוויון המשולש $|f(z)|=|-2z^3+1|\le 2|z|^3+1\underset{|z|=1}{=}3$

$$|g(z)|=|9z^5e^z|=9|z|^5|e^z|\underset{|z|=1}{=}9|e^z|\underset{\substack{z=x+iy\\ |e^z|=e^x}}{=}9e^x\underset{(*)}{\ge}\frac{9}{e}$$

(*) על השפה $\gamma:|z|=1$ מתקיי'ם $-1\le x\le 1$ ומכיוון ש-$e^x$ עולה מתקיי'ם $\frac{1}{e}=e^{-1}\le e^x$

קיבלנו שעל $\gamma:|z|=1$ מתקיי'ם $|g(z)|\ge\frac{9}{e}>3\ge|f(z)|\Leftarrow|f(z)|<|g(z)|$.

לכן לפי משפט רושה, ל-$g(z)$ ול-$f(z)+g(z)$ אותו מספר אפסים כולל ריבוי בעיגול היחידה $B(0,1)$. ל-$g(z)=9z^5e^z$ יש אפס בנקודה $z=0$ מסדר 5 והוא בעיגול היחידה,

כלומר יש ל- $g$ 5 אפסים כולל ריבוי בעיגול, ולכן גם ל-
$f(z)+g(z)=h(z)=9z^5e^z-2z^3+1$ יש 5 אפסים ב-$B(0,1)$.

## שאלה 8

יהי $a>1$ קבוע ממשי. נגדיר $f(z)=ze^{a-z}$. הוכיחו שבעיגול היחידה $\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ קיים בדיוק פתרון אחד למשוואה $f(z)=1$.

## פתרון

תחילה נרשום את המשוואה הנתונה בצורה אחרת:

$$f(z)=1\Rightarrow ze^{a-z}=1\Rightarrow \frac{ze^a}{e^z}=1\left(\cdot e^z\neq 0\right)\Rightarrow ze^a=e^z\Rightarrow ze^a-e^z=0$$

לכן המשוואה $f(z)=1$ שקולה למשוואה $ze^a-e^z=0$.

כעת נשתמש במשפט רושה: נגדיר $h(z)=-e^z$, $g(z)=ze^a$. על מעגל היחידה $\gamma:|z|=1$ מתקיים: $|g(z)|=\underbrace{|z|}_{=1}\cdot|e^a|=e^a\underset{a>1}{>}e^1=e$ ו-

$$|h(z)|=|-e^z|=e^{\operatorname{Re}(z)}\underset{|z|=1\Rightarrow -1<x=\operatorname{Re}(z)<1}{<}e^1=e<e^a=|g(z)|$$

מכאן לפי משפט רושה, ל-$g(z)$ ול- $g(z)+h(z)=ze^a-e^z$ אותו מספר אפסים בעיגול היחידה $\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$. ל- $g(z)=ze^a$ יש אפס יחיד בעיגול זה (בנקודה $z=0$), לכן גם למשוואה $ze^a-e^z=0$ יש פתרון יחיד, וכאמור זה שקול לכך שלמשוואה המבוקשת $f(z)=1$ יש פתרון יחיד.

## שאלה 9

קבעו כמה אפסים, כולל ריבוי, יש לפונקציה $2z^5-z^4+2z^3-z^2+5z-6$ בעיגול $B(0,2)$.

## פתרון

הפונקציה אנליטית בעיגול הסגור $\overline{B(0,2)}$.

נשים לב ש-$2z^5$ הוא הדומיננטי, כי על השפה $|z|=2$ הוא יהי'ה 64.

נגדיר את הפונקציות: $g(z)=2z^5$, $f(z)=-z^4+2z^3-z^2+5z-6$.

ונראה שעל השפה $\gamma=\left\{z\in\mathbb{C} : |z|=2\right\}$ מתקיים: $|f(z)|<|g(z)|$, כלומר $g(z)$ דומיננטית ב- $\gamma$.

לפי תכונות ערך מוחלט ואי-שוויון המשולש נקבל:

$$|f(z)|=\left|-z^4+2z^3-z^2+5z-6\right|\le|z|^4+2|z|^3+|z|^2+5|z|+6\underset{|z|=2}{=}52<|g(z)|=2|z|^5=64$$

לכן, על $\gamma$ מתקיי'ים: $|f(z)|<|g(z)|$.

מכאן, לפי משפט רושה, ל- $g(z)=2z^5$ ול- $f(z)+g(z)=2z^5-z^4+2z^3-z^2+5z-6$ אותו מספר אפסים כולל ריבוי ב- $B(0,2)=\left\{z\in\mathbb{C} : |z|<2\right\}$. מכוון של- $g(z)=2z^5$ יש 5 אפסים כולל ריבוי בעיגול זה, כך גם לפונקציה המבוקשת.

## <u>**שאלה 10**</u>

מצאו $q$ כלשהו כך שלפולינום $P(z)=z^5-7z^4-5z^3+2z^2+qz-3$ יש בדיוק 3 אפסים בטבעת $\frac{1}{2}<|z|<2$.

## <u>**פתרון**</u>

ברצוננו לקבל 3 אפסים של $P$ בטבעת $\frac{1}{2}<|z|<2$.

נבדוק כמה אפסים יש בעיגול $|z|<2$ וכמה אפסים בעיגול $|z|<\frac{1}{2}$.

נשתמש במשפט רושה:

נסמן $f(z)=z^5-5z^3+2z^2+qz-3$ ו- $g(z)=-7z^4$.

על $\gamma:|z|=2$ מתקיי'ים:

$$|g(z)|=\left|-7z^4\right|=7|z|^4=7\cdot2^4=112$$

לפי אי שוויון המשולש:

$$|f(z)|=\left|z^5-5z^3+2z^2+qz-3\right|\le|z|^5+5|z|^3+2|z|^2+|q||z|+3=2^5+5\cdot2^3+2\cdot2^2+2q+3=2q+83$$

נדרוש $|f(z)|<|g(z)|$ ונקבל:

$$2q+83<112\Rightarrow q<\frac{29}{2}$$

לכן לפי רושה, ל- $g(z)=-7z^4$ ול- $P(z)=f(z)+g(z)$ אותו מספר אפסים ב- $|z|<2$.

ל- $g(z)=-7z^4$ יש אפס בנקודה $z=0$ והוא אפס מסדר 4, לכן בסה"כ ל- $g$ ולכן גם ל- $P(z)=f(z)+g(z)$ יש 4 אפסים כולל ריבוי ב- $|z|<2$.

כעת נבדוק בעיגול $|z|<\frac{1}{2}$.

נשתמש במשפט רושה:

נבחר פונקצי'ה דומיננטית על השפה של העיגול.

נסמן $f_1(z)=z^5-7z^4-5z^3+2z^2-3$ ו- $g_1(z)=qz$.

על $\gamma_1:|z|=\frac{1}{2}$ מתקים:

$$|g_1(z)|=|qz|=|q||z|=\frac{|q|}{2}$$

לפי אי שוויון המשולש:

$$|f_1(z)|=|z^5-7z^4-5z^3+2z^2-3|\le|z|^5+7|z|^4+5|z|^3+2|z|^2+3=\frac{1}{2^5}+\frac{7}{2^4}+\frac{5}{2^3}+\frac{2}{2^2}+3=\frac{147}{32}$$

נדרוש $|f_1(z)|<|g_1(z)|$ ונקבל:

$\frac{147}{32}<\frac{|q|}{2}\Rightarrow\frac{147}{16}<|q|$ לכן לפי רושה, ל- $g_1(z)=qz$ ול- $P(z)=f_1(z)+g_1(z)$ אותו מספר אפסים ב- $|z|<\frac{1}{2}$.

הערה: מספיק למצוא $q$ חיובי לכן נוותר על הערך המוחלט.

ל- $g_1(z)=qz$ יש אפס בנקודה $z=0$ והוא אפס מסדר 1, לכן בסה"כ ל- $g_1(z)$ ולכן גם ל- $P(z)=f_1(z)+g_1(z)$ יש אפס יחיד כולל ריבוי ב- $|z|<\frac{1}{2}$.

<u>הערה</u>: כשמתקימים התנאים של רושה אף אחת מהפונקציות לא יכולה להתאפס על השפה, לכן אין צורך לבדוק אם יש אפסים על <u>השפה</u>.

<u>לסיכום</u>: אם נבחר $q\in\left(\frac{147}{16},\frac{29}{2}\right)$ נקבל שבטבעת $\frac{1}{2}<|z|<2$ יש בסה"כ 3=4-1 אפסים כולל ריבוי ל- $P(z)$.

## שאלה 11

מצאו $a>1$ כלשהו כך שלפולינום $P(z)=z^5-9z^4+7z^3+8z^2+z+6$ יש בדיוק 4 אפסים בטבעת $\frac{1}{2}<|z|<a$.

## פתרון

ברצוננו לקבל 4 אפסים של $P$ בטבעת $\frac{1}{2}<|z|<a$.

תחילה נבדוק כמה אפסים יש בעיגול $|z|<\frac{1}{2}$ ולאחר מכן נבדוק כמה אפסים עלינו לדרוש ב $|z|<a$ בכדי שנקבל בדיוק 4 אפסים.

נשתמש במשפט רושה:

נבחר פונקצי'ה דומיננטית על השפה של העיגול $|z|<\frac{1}{2}$.

נסמן $f_1(z)=z^5-9z^4+7z^3+8z^2+z$ ו- $g_1(z)=6$.

על $\gamma_1:|z|=\frac{1}{2}$ מתקים:

$$|g_1(z)|=|6|=6$$

לפי אי שוויון המשולש:

$$|f_1(z)|=|z^5-9z^4+7z^3+8z^2+6|\le|z|^5+9|z|^4+7|z|^3+8|z|^2+|z|=\frac{1}{2^5}+\frac{9}{2^4}+\frac{7}{2^3}+\frac{8}{2^2}+\frac{1}{2}<6=|g_1(z)|$$

לכן לפי רושה, ל- $g_1(z)=6$ ול- $P(z)=f_1(z)+g_1(z)$ אותו מספר אפסים ב- $|z|<\frac{1}{2}$.

ל- $g_1(z)=6$ אין אפסים בכלל, לכן בסה"כ ל- $g_1(z)$ ולכן גם ל- $P(z)=f_1(z)+g_1(z)$ אין אפסים ב- $|z|<\frac{1}{2}$.

כעת כוון שאנו יודעים שאין אפסים ב- $|z|<\frac{1}{2}$ עלינו למצוא $a$ כך שנקבל בעיגול $|z|<a$ בדיוק 4 אפסים.

ננסה לקבוע $a=2$ ונראה מה התוצאה.

נשתמש במשפט רושה:

נבחר פונקצי'ה דומיננטית על השפה של העיגול.

נסמן $f(z)=z^5+7z^3+8z^2+z+6$ ו- $g(z)=-9z^4$.

על $\gamma:|z|=2$ מתקיי'ים:

$$|g(z)|=|-9z^4|=9|z|^4=9\cdot 2^4=144$$

לפי אי שוויון המשולש:

$$|f(z)|=|z^5+7z^3+8z^2+z+6|\le|z|^5+7|z|^3+8|z|^2+|z|+6=2^5+7\cdot 2^3+8\cdot 2^2+2+6=128<144=|g(z)|$$

לכן לפי רושה, ל- $g(z)=-9z^4$ ול- $P(z)=f(z)+g(z)$ אותו מספר אפסים ב- $|z|<2$.

ל- $g(z)=-9z^4$ יש אפס בנקודה $z=0$ והוא אפס מסדר 4, לכן בסה"כ ל- $g$ ולכן גם ל- $P(z)=f(z)+g(z)$ יש 4 אפסים כולל ריבוי ב- $|z|<2$.

<u>סיכום:</u> לכן קיבלנו שעבור $a=2$ לפולינום $P(z)$ יש בדיוק 4 אפסים כולל ריבוי בטבעת $\frac{1}{2}<|z|<2$.