תרגיל 12 - פתרון

22 בינואר 2018

שאלה 1

חשבו את הגבולות הבאים העזרת ההגדרה:

א) $a_n = n^6 - 3n^5 - 3n^4 - n^2 + 2n + 1$

פתרון:

יהי H אינסופי היפר טבעי,

$$a_H = H^6 - 3H^5 - 3H^4 - H^2 + 2H + 1 = H^6\left(1 - \frac{3}{H} - \frac{1}{H^4} + \frac{2}{H^5} + \frac{1}{H^6}\right),$$

קיבלנו ש- a_H הוא מספר אינסופי חיובי ולכן:

$$lim_{n\to\infty} = \infty$$

ב) $a_n = \sqrt{5n^4 + n^2} - \sqrt{5n^4 - n^2 + n + 1}$

פתרון:

יהי H אינסופי היפר טבעי,

$$a_H = \sqrt{5H^4 + H^2} - \sqrt{5H^4 - H^2 + H + 1} = \frac{\left(\sqrt{5H^4+H^2} - \sqrt{5H^4-H^2+H+1}\right)\left(\sqrt{5H^4+H^2} + \sqrt{5H^4+H^2}\right)}{\sqrt{5H^4+H^2} + \sqrt{5H^4-H^2+H+1}} =$$

$$\frac{2H^2-H-1}{\sqrt{5H^4+H^2}+\sqrt{5H^4-H^2+H+1}} = \frac{2-\frac{1}{H}-\frac{1}{H^2}}{\sqrt{\frac{5}{H^4}+\frac{1}{H^2}}+\sqrt{5-\frac{1}{H^2}+\frac{1}{H^3}+\frac{1}{H^4}}}$$

$$lim_{n\to\infty} a_n = st(a_H) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

ג) $a_n = \sqrt[3]{n^9 + n^6 - 3n + 3} - \sqrt[3]{n^9 - n^6 - 1}$

פתרון:

יהי H אינסופי היפר טבעי,

$$a_H = \sqrt[3]{H^9 + H^6 - 3H + 3} - \sqrt[3]{H^9 - H^6 - 1} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{H^9+H^6-3H+3} - \sqrt[3]{H^9+H^6-1}\right)\left(\left(\sqrt[3]{H^9+H^6-3H+3}\right)^2 + \sqrt[3]{H^9+H^6-3H+3}\,\sqrt[3]{H^9-H^6-1}\right) + \left(\sqrt[3]{H^9-H^6-1}\right)^2)}{\left(\left(\sqrt[3]{H^9+H^6-3H+3}\right)^2 + \sqrt[3]{H^9+H^6-3H+3}\,\sqrt[3]{H^9-H^6-1} + \left(\sqrt[3]{H^9-H^6-1}\right)^2\right)} =$$

$$= \frac{H^9+H^6-3H+3-\left(H^9-H^6-1\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{H^9+H^6-3H+3}\right)^2 + \sqrt[3]{H^9+H^6-3H+3}\,\sqrt[3]{H^9-H^6-1} + \left(\sqrt[3]{H^9-H^6-1}\right)^2\right)} = \frac{2H^6-3H+4}{(*)} =$$

$$= \frac{2-\frac{3}{H^5}+\frac{4}{H}}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{H^3}-\frac{3}{H^8}+\frac{3}{H^9}}\right)^2 + \sqrt[3]{1+\frac{1}{H^6}-\frac{3}{H^8}+\frac{3}{H^9}}\,\sqrt[3]{1-\frac{1}{H^3}-\frac{1}{H^9}} + \left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{H^3}-\frac{1}{H^9}}\right)^2}$$

$$lim_{n\to\infty} a_n = st(a_H) = \frac{2}{3}$$

שאלה 2

חשבו את הגבולות הבאים בעזרת המשפטים או בעזרת ההגדרה:

א) $\left(\frac{2n^3-1}{2n^3+3}\right)^{3n^3+4}$

פתרון:

$$\left(\frac{2n^3+3-4}{2n^3+3}\right)^{3n^3+4}=\left(1-\frac{4}{2n^3+3}\right)^{3n^3+4}=\left(1-\frac{4}{2n^3+3}\right)^{\frac{3}{2}\cdot 2n^3+\frac{9}{2}-\frac{9}{2}+4}=$$

$$=\left(1-\frac{4}{2n^3+3}\right)^{\frac{3}{2}\left(2n^3+3\right)}\left(1-\frac{4}{2n^3+3}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{4}{2n^3+3}\right)^{2n^3+3}\right)^{\frac{3}{2}}=e^{\frac{3}{2}}$$

$$lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{2n^3+3}\right)^{-\frac{1}{3}}=1$$

ולכן לפי אריתמטיקה של גבולות: $lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3-1}{2n^3+3}\right)^{3n^3-4}=e^{\frac{3}{2}}$

ב) $\frac{(ln(n))^n}{(5n)^n}$

פתרון:

לפי חוקי חזקות נרשום:

$$\left(\frac{ln(n)}{5n}\right)^n=e^{n\cdot ln\left(\frac{ln(n)}{5n}\right)}$$

קל לראות שהחזקה שואפת ל־$-\infty$ ולכן הגבול של הסדרה כולה שואף ל־0 .

ג) $\frac{(-1)^n}{n}$ (אפשר לפתור את התרגיל הזה בכמה שיטות, נסו כאן משפט הסנוויץ)

פתרון:

נשים לב ש־$-\frac{1}{n}\le\frac{(-1)^n}{n}\le\frac{1}{n}$,

ולכן לפי משפט הסנדוויץ $lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0=lim_{n\to\infty}-\frac{1}{n}$ ולכן $lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$

ד) $\frac{5^n+7^n}{5^n-7^n}$

פתרון:

$$lim_{n\to\infty}\frac{5^n+7^n}{5^n-7^n}=lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{7}\right)^n+1}{\left(\frac{5}{7}\right)^n-1}=-1$$

הסבר:

נתבונן הפונקציה $f(x)=\left(\frac{5}{7}\right)^x$, זו פונקציה מעריכית עם בסיס בין אפס לאחד, ולכן כאשר $x\to\infty$ הגבול שלה הוא אפס ולכן הגבול של $\left(\frac{5}{7}\right)^n$ הוא גם אפס.

ה) $\left(8^n-n^2\right)$

פתרון:

$$8^n-n^2=n^2\left(\frac{8^n}{n^2}-1\right)$$

$$lim_{n\to\infty}n^2=\infty$$

$lim_{n\to\infty}\left(\frac{8^n}{n^2}-1\right)=\infty$ לפי משפט סדרי גודל ולכן הגבול של הסדרה שלנו היא ∞.

ו) $\frac{n!+6}{(n+1)!+8}$

פתרון:

$$\frac{n!\left(1+\frac{6}{n!}\right)}{n!\left(n+1+\frac{8}{n!}\right)}=\frac{1+\frac{6}{n1}}{n+1+\frac{8}{n!}}$$

$lim_{n\to\infty}\frac{6}{n!}=lim_{n\to\infty}\frac{8}{n!}=0$
$lim_{n\to\infty}n=\infty$
ולכן $lim_{n\to\infty}\frac{n!+6}{(n+1)!+8}=0$

ז) $\left(\frac{n}{n^2-2}\right)^{\frac{8n^4-3n^3-3n^2+2n}{7n^3+2n-2}}$

פתרון:

נרשום $\left(\frac{n}{n^2-2}\right)^{\frac{8n^4-3n^3-3n^2-2n}{7n^3-2n-2}}=e^{\frac{8n^4-3n^3-3n^2-2n}{7n^3-2n-2}\cdot ln(\frac{n}{n^2-2})}$
$lim_{n\to\infty}\frac{8n^4-3n^2-3n^3-2n}{7n^3-2n-2}\cdot ln\left(\frac{n}{n^2-2}\right)=-\infty$
ולכן $lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2-2}\right)^{\frac{8n^4-3n^3-3n^2-2n}{7n^3-2n-2}}=e^{-\infty}=0$

ח) $\frac{4^{n-5}}{2^n}$

פתרון:

$\frac{4^{n-5}}{2^n}=(2)^n\cdot\frac{1}{4^5}$
2^n זו סדרה ששואפת ל־∞ולכן $lim_{n\to\infty}\frac{4^{n-5}}{2^n}=\infty$

שאלה 3

א) הוכיחו ש־$lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ כאשר $0<a\in\mathbb{R}$

פתרון:

נתבונן בפונקציה $f(x)=a^{\frac{1}{x}}$ כאשר $x\to\infty$ הגבול $=lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{x}}=lim_{n\to\infty}e^{\frac{ln(a)}{x}}=$ $e^0=1$
ולכן הגבול של הסדרה שלנו הוא 1

ב) תנו דוגמה לסדרות הבאות ונמקו את תשובתכם:

1) חסומה שלא מתכנסת

פתרון:

$a_n=(-1)^n$ זו סדרה חסומה בין 1־ ל 1 , וראינו בהרצאה שהיא לא מתכנסת

2) סדרה מונוטונית שלא חסומה

$a_n=n$, הסדרה הזו היא עולה כי $a_{n+1}-a_n=n+1-n=1>0$ ולכן היא מונוטונית.
הסדרה לא חסומה, כי אחרת היא היתה מתכנסת לגבול סופי לפי משפט מההרצאה.
נציב H אינסופי היפר טבעי ונקבל $a_H=H$ שהוא מספר אינסופי חיובי ולכן הסדרה מתבדרת ל־∞ בסתירה.
ולכן הסדרה לא חסומה מלעיל אבל היא כן חסומה מלרע ע"י 1

3) סדרה לא מונוטונית ולא חסומה

$a_n=(-1)^n n$
הסדרה לא מונוטונית כי אם nזוגי אזי $n+1$ הוא אי זוגי ולכן $a_{n+1}-a_n=-(n+1)-n=-2n-1<0$

מצד שני אם n אי זוגי ואז $n+1$ זוגי אזי $a_{n+1}-a_n=n+1-(-n)=2n+1>0$
הסדרה לא חסומה כי עבור n־ים זוגיים נסמן $n=2k$ ונקבל $a_{2k}=2k$ ולכן הסדרה לא חסומה מלעיל
ועבור n־ים אי זוגיים נסמן $n=2k+1$ ונקבל $a_{2k+1}=-(2k+1)$ ולכן הסדרה לא חסומה מלרע.

4) סדרה יורדת וחסומה מלרע

פתרון:
$a_n=\frac{1}{n}$, זו סדרה יורדת כי $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n}=0$
ברור שהסדרה חסומה מלרע ע"י 0 כי $\frac{1}{n}>0$ לכל n טבעי.

5) סדרה עולה וחסומה מלעיל

פתרון:
$a_n=-\frac{1}{n}$, ברור שהסדרה היא מונוטונית עולה כי $a_{n+1}-a_n=-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}>0$
ברור שהסדרה חסומה מלעים על ידי 0 כי $-\frac{1}{n}<0$ לכל n טבעי.

ג) נתונות שתי סדרות a_n, b_n הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1) אם $lim_{n\to\infty}a_n\cdot b_n=0$ אזי $lim_{n\to\infty}a_n=0$ או $lim_{n\to\infty}b_n=0$.

פתרון:
הפרכה, נבחר
$a_n=\begin{cases}1 & n \text{ is even}\\ 0 & n \text{ is odd}\end{cases}$, $b_n=\begin{cases}0 & n \text{ is even}\\ 1 & n \text{ is odd}\end{cases}$
כלומר $a_n=0,1,0,1,0,1.....$, $b_n=1,0,1,0,1,0,....$
קל לראות ש־$a_n\cdot b_n=0$ ולכן הגבול הוא אפס, מצד שני ברור ש־$a_n,b_n\neq 0$

2) אם a_n+b_n היא סדרה מתכנסת אזי a_n ו־b_n מתנסות.

פתרון:
הפרכה: נבחר $a_n=(-1)^n$, $b_n=(-1)^{n+1}$
כלומר $a_n=-1,1,-1,1,-1,....$, $b_n=1,-1,1,-1,1,-1,....$
ברור ש־$a_n+b_n=0$ לכל n טבעי ולכן הגבול הוא אפס, מצד שני ראינו מהרצאה שהסדרות הללו הן סדרות מתבדרות

שאלה 4

תהי a_n סדרה ששואפת לאפס, b_n סדרה שאין לה גבול (לא סופי ולא אינסופי).

א) תנו דוגמה ל־a_n, b_n עבורן $lim_{n\to\infty}a_n\cdot b_n=0$

פתרון:
$a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=(-1)^n$, ולכן $lim_{n\to\infty}a_n\cdot b_n=lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$

ב) תנו דוגמה לסדרות a_n, b_n עבורן $lim_{n\to\infty}a_n\cdot b_n=1$

פתרון:
$a_n=\frac{(-1)^n}{n}$, $b_n=(-1)^n n$,

$lim_{n\to\infty}a_n\cdot b_n = lim\frac{(-1)^n(-1)^n n}{n} = 1$

ג) תנו דוגמה לסדרות a_n, b_n עבורן $lim_{n\to\infty}a_n\cdot b_n$ לא קיים

פתרון:
$a_n = (-1)^n n$, $b_n = \frac{1}{n}$ ולכן
$lim_{n\to\infty}a_n\cdot b_n = lim\frac{(-1)^n n}{n} = lim\,(-1)^n$ לא קיים

ד) בתנאים של התרגיל, מה אפשר להגיד על הגבול של $a_n\cdot b_n$?

פתרון:
לא ניתן להגיד כלום

שאלה 5

הוכיחו בעזרת ההגדרה של ϵ ש־$lim_{n\to\infty}\frac{4n+5}{2n} = 2$

פתרון:
יהי $\epsilon > 0$ נרצה למצוא $n_0\in\mathbb{N}$ כל שלכל $n > n_0$ מתקיים $\left|\frac{4n+5}{2n} - 2\right| < \epsilon$.
$\left|\frac{4n+5}{2n} - 2\right| = \left|\frac{4n+5-4n}{2n}\right| = \left|\frac{5}{2n}\right| < \epsilon$ אם ורק אם $n > \frac{5}{2\epsilon}$ ולכן אפשר לקחת $n_0 = \left\lfloor\frac{5}{2\epsilon}\right\rfloor + 1$.