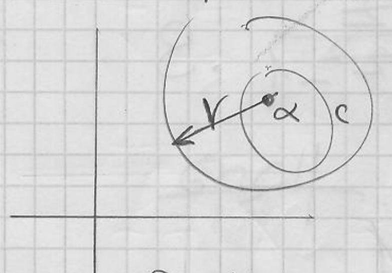
(1) הגדרה: יהי $\alpha\in\mathbb{C}$ מספר מרוכב, לטור

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ קוראים טור לורן סביב α ($a_n\in\mathbb{C}$)

משפט לורן: תהי f פונקציה אנליטית בטבעת הנקובה $r>|\alpha-z|>0$. לכל n שלם (חיובי, שלילי או אפס) נסמן $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)\,dw}{(w-\alpha)^{n+1}}$ כאשר

C מסמן מעגל ברדיוס ρ סביב α $r>\rho>0$.



אז:

א. הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ מתכנס

ל-$f(z)$ לכל z בטבעת הנקובה $r>|\alpha-z|>0$.

ב. הפיתוח של f לטור לורן בטבעת הנקובה

$r>|\alpha-z|>0$ הוא יחיד, כלומר אם הטור

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-\alpha)^n$ גם מתכנס ל-f בטבעת הנקובה

אז $b_n=a_n$ לכל n שלם.

ג. - אם בטור לורן לא מופיעות חזקות שליליות

אז ל-f יש סינגולריות סליקה ב-α.

- אם בטור לורן מופיע מספר סופי של חזקות

שליליות אז ל-f יש קוטב בנקודה $z=\alpha$

וסדר הקוטב שווה למספר הגדול ביותר M

(2)

המקיים $0 \neq a_{-1}$.

- אם בטור לורן מופיעות אינסוף חזקות שליליות אז ל-f יש סינגולריות עיקרית ב-α.

<u>דוגמא</u>: פתחו לטור לורן סביב הנקודה $z=\alpha$ את הפונקציות הבאות וקבעו את סוג הסינגולריות

1. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$, $\alpha=0,1$

2. $f(z)=\sin\left(\dfrac{z}{z-1}\right)$, $\alpha=1$

3. $f(z)=\dfrac{z}{e^{z^2}-1}$ $\alpha=0$

<u>פתרון</u>

$$1.\ f(z)=\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}$$

$$=-\frac{1}{z}-1-z-z^2-z^3-\dots$$

הטור לורן מתכנס עבור $0<|z|<1$ ו-$\alpha=0$ היא קוטב מסדר 1. עבור $\alpha=1$ נקבל

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{(z-1)+1}$$

$$=\frac{1}{z-1}-1+(z-1)-(z-1)^2\dots$$

הטור מתכנס עבור $0<|z-1|<1$ ו-$\alpha=1$ היא קוטב מסדר 1.

3

2. $f(z) = \sin\left(\frac{z}{z-1}\right) = \sin\left(1 + \frac{1}{z-1}\right)$

$$= \sin(1)\cos\left(\frac{1}{z-1}\right) + \cos(1)\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

$$= \sin(1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-1)^{-2n}$$

$$+ \cos(1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-1)^{-2n-1}$$

הטור מתכנס ב- $0<|z-1|<\infty$ והסינגולריות
ב- $z=1$ היא עיקרית.

3. $f(z) = \frac{z}{e^{z^2}-1} = \frac{z}{1+z^2+\frac{z^4}{2}+\dots-1}$

$$= \frac{z}{z^2\Big(1+\underbrace{\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{6}+\dots}_{w}\Big)}$$

לכן נסמן $\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{6}+\dots = w$ ונשתמש
כלומר $\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n$ כדי לקבל

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(1 - \left(\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{6}+\dots\right) + \left(\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{6}\dots\right)^2 + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{z}\left(1 - \frac{z^2}{2} + \left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)z^4 + \dots\right)$$

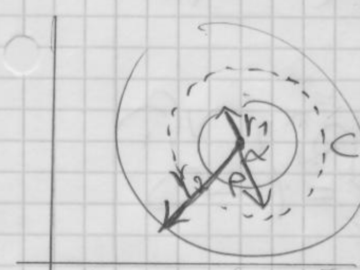
(4) לכן $c=\alpha$ היא קוטב מסדר 1.

פיתוח לטור לורן בטבעת

תהי f פונקציה בטבעת $r_1<|z-\alpha|<r_2$ כאשר $0\le r_1<r_2\le\infty$. לכל n שלם נגדיר

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}}$$

כאשר c הוא מעגל ברדיוס ρ סביב α כאשר $r_1<\rho<r_2$



אזי

א. הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ מתכנס בטבעת $r_1<|z-\alpha|<r_2$ וסכומו שם הוא $f(z)$.

ב. הפיתוח של f לטור לורן סביב α בטבעת $r_1<|z-\alpha|<r_2$ הוא יחיד.

<u>דוגמא:</u> נפתח את הפונ' $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)(2-z)}$ לטור לורן בטבעת $1<|z|<2$. ע"י פירוק לשברים חלקיים נקבל

$$\frac{1}{(1-z)(2-z)}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}$$

כיוון ש-$1<|z|$ נקבל

$$\frac{1}{1-z}=\frac{-1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

(5) כיוון ש- $|z|<2$ נקבל

$$-\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\dots\right)$$

לכן $f(z) = -\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}-\frac{z}{2^2}-\frac{z^2}{2^3}-\dots$

עבור $1<|z|<2$.

כעת נפתח את טור לורן בטבעת $2<|z|$ $\quad |z|>2$

$$f(z) = \frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{2}{z}}$$

$$= -\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots\right)+\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\dots\right)$$

$$= \frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\dots$$

<u>הערה:</u> החלק העיקרי בטור לורן של פונקציה בטבעת $r_1<|z-\alpha|<r_2$ $(r_1>0)$ אינו נותן מידע על סוג הסינגולריות של f ב- $z=\alpha$.

לדוגמא, פיתוח לטור לורן בטבעת $1<|z|<2$ לפונק' $f(z)=\frac{1}{(1-z)(2-z)}$ מכיל אינסוף חזקות שליליות אולם ל- f אין סינגולריות ב- $z=0$.