תרגיל 5

1. תהי X קבוצה, ונסתכל על האוסף הבא: $\tau = \{A \subseteq X : |A^c| \text{ is infinite}\} \cup \{\emptyset, X\}$. הויחו/הפריכו: τ מהווה טופולוגיה על X.

פתרון:

הפרכה: נקח $X = \mathbb{R}$. אז $(-\infty, 0) \in \tau$, כי המשלים שלו אינסופי. כנ"ל לגבי $(0, \infty)$. אזל $(0, \infty) \cup (-\infty, 0) \notin \tau$ כי המשלים שלו סופי. כלומר, הקבוצה לא סגורה לאיחודים, ולכן לא מהווה טופולוגיה.

2. א. נתבונן ב$\mathbb{R}$ ובתת קבוצה שלו $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. נסתכל על האוסף הבא של תתי קבוצות: $\{C = A \cup T\}$ כך ש A היא קבוצה סגורה בטופולוגיה האוקלידית על $\mathbb{R}$, וT היא תת קבוצה של S. הוכיחו שהמשלימים של הקבוצות האלו יוצרים טופולוגיה על $\mathbb{R}$. הדרכה: הוכיחו שזאת טופולוגיה ע"י בדיקה שהקבוצות הסגורות (כלומר $\{C\}$) מקיימות את שלוש התכונות של קבוצות סגורות.

ב. נתבונן בקבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$, ולכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר: $O_n = \{n, n+1, n+2...\}$. נסתכל על האוסף $\tau = \{O_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{Z}\}$.

- הוכיחו שτ הוא טופולוגיה על $\mathbb{Z}$.
- הוכיחו שτ אינו מטריזבילי.

פתרון:

א. $\emptyset$: קבוצה ריקה סגורה כי $A = \emptyset$ קבוצה סגורה ב$\mathbb{R}$, ו$T = \emptyset$ תת קבוצה של S . ו$\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$.

$\mathbb{R}$: $A = \mathbb{R}$ קבוצה סגורה ב$\mathbb{R}$. $T = \emptyset$ תת קבוצה של S. אז $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \emptyset$.

איחוד סופי: יהיו $C_1, ..., C_n$ קבוצות סגורות. כלומר $C_i = A_i \cup T_i$. אזי $C_1 \cup ... \cup C_n = (A_1 \cup T_1) \cup ... \cup (A_n \cup T_n) = (A_1 \cup ... \cup A_n) \cup (T_1 \cup ... \cup T_n)$. נשים לב שכל A_i קבוצה סגורה ב$\mathbb{R}$, וכל $T_i \subseteq S$. לכן $A_1 \cup ... \cup A_n$ קבוצה סגורה ב$\mathbb{R}$ כאיחוד סופי של סגורות, ו$T_1 \cup ... \cup T_n \subseteq S$.

חיתוך כלשהו: יהיו $C_i = A_i \cup T_i$ קבוצות סגורות. נסמן $C = \bigcap C_i$. נשים לב שמכיוון $\bigcap A_i \subseteq \bigcap C_i$ אז $C = \bigcap C_i = (\bigcap A_i) \cup (C \setminus \bigcap A_i)$. $\bigcap A_i$ הוא קבוצה סגורה ב$\mathbb{R}$ כחיתוך כלשהו של קבוצות סגורות. ואילו $C \setminus \bigcap A_i$ הוא תת קבוצה של T. (כי אם $x \in \bigcap C_i$, אבל $x \notin \bigcap A_i$, זה אומר שיש i כך ש$x \notin A_i$. אולם, $x \in A_i \cup T_i$. לכן $x \in T_i \subseteq S$.)

ב. נוכיחו שזאת טופולגיה: מההגדרה היא מכילה את הקבוצה הריקה ואת כל המרחב.

איחוד כלשהו: נניח שO_i כולן קבוצות, ונרצה להוכיח ש $\bigcup O_i$ פתוחה. אם יש i כך ש$O_i = \mathbb{Z}$, אז סיימנו. אחרת, לכל i, $O_i = O_n$ עבור איזשהו n. נקח $m = \min\{n : O_i = O_n\}$, כלומר, נקח את ה$n$ הקטן מבינהם, אז $\bigcup O_i = O_m$.

חיתוך סופי: אם אחת הקבוצות היא הקבוצה הריקה, טריוויאלי. אחרת, נסתכל על $O_n \cap O_m$. נניח בה"כ ש $m < n$, אז $O_m \cap O_n = O_n$. (נשים לב שחיתוך עם $\mathbb{Z}$ לא משנה כלום).

כעת, נראה שהטופולוגיה אינה מטריזבילית. הנקודון $\{1\}$ למשל אינו סגור, כי $\{1\}^c$ לא פתוח.

3. תהי Y קבוצה כלשהי, ו $p \notin Y$. נגדיר $X = Y \cup \{p\}$. נסתכל על האוסף הבא: $\tau = \{O \subseteq X : p \notin O \vee |O^c| \leq \aleph_0\}$.

א. הוכיחו ש(X, τ) מרחב טופולוגי.

ב. אם $|Y| \leq \aleph_0$, הכיחו ש $\tau = \tau_{disc}$.

ג. בתנאי סעיף ב', הוכיחו שהטופולוגיה מטריזבילית.

פתרון:

א. נוכיח ששלוש התכונות מתקיימות.

קבוצה ריקה פתוחה כי p לא נמצא בה, והמרחב כלו פתוח כי המשלים שלו סופי.

יהיו $\{O_i\}$ קבוצות פתוחות. אם בכולן לא נמצא p, אז $p \notin \bigcup O_i$, ולכן האיחוד פתוח. אחרת, יש i כך ש $|O_i^c| \leq \aleph_0$. ואז $(\bigcup O_i)^c \subseteq O_i^c$ לכן $|(\bigcup O_i)^c| \leq \aleph_0$, כלומר, האיחוד פתוח.

חיתוך סופי: יהיו O_1, O_2 קבוצות פתוחות. אם באחת מהן p לא נמצא, אז הוא לא נמצא בחיתוך, ולכן החיתוך פתוח. אחרת, שתיהן עם משלים בין מניה. ואז: $|(O_1 \cap O_2)^c| = |O_1^c \cup O_2^c| \leq |O_1^c| + |O_2^c| = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. לכן החיתוך פתוח.

ב.מספיק להויח שכל נקודון פתוח (כי כל קבוצה היא איחוד של נקודונים). יהי $x \in Y$. אם Y בן מניה אז $\{x\}^c$ בן מניה, ולכן $\{x\}$ פתוח.

ג. טופולוגיה דיסקרטית מושרית מהמטריקה הדיסקרטית.

4.א. נגדיר שני אוספים של תתי קבוצות של $\mathbb{N}$. $\tau_1 = \{O \subseteq \mathbb{N} : O = \emptyset \vee |O^c| < \infty\}$, $\tau_2 = \{O \subseteq \mathbb{N} : 1 \notin O \vee |O^c| < \infty\}$. הוכיחו ששניהם טופולוגיות על $\mathbb{N}$.

ב. נסתכל על הפונקציות הבאות מ $\mathbb{N}$ ל$\mathbb{N}$: $f = Id$, $g(n) = \begin{cases} 1 & n = 2m+1 \\ 1 + \dfrac{n}{2} & n = 2m \end{cases}$.

האם הפונקציות רציפות במקרים הבאים: (נמקו)

- $f : (\mathbb{N}, \tau_1) \to (\mathbb{N}, \tau_2)$
- $f : (\mathbb{N}, \tau_2) \to (\mathbb{N}, \tau_1)$
- $g : (\mathbb{N}, \tau_1) \to (\mathbb{N}, \tau_2)$
- $g : (\mathbb{N}, \tau_2) \to (\mathbb{N}, \tau_1)$

פתרון:

א. τ_1 זאת הטופולוגיה הקוסופית. הוכחנו בתרגול שזאת טופולוגיה. נוכיח עבור τ_2: $\emptyset \in \tau_2$ כי $1 \notin \in \emptyset$. $\mathbb{N} \in \tau_2$ כי $|\mathbb{N}^c| < \infty$.

איחודים כלשהם: יהיו O_i קבוצות בτ_2, ונסתכל על $\bigcup O_i$. אם לכל i, $1 \notin O_i$, אז $1 \notin \bigcup O_i$, ולכן $\bigcup O_i \in \tau_2$. אחרת, יש i כך ש $|O_i^c| < \infty$. ידוע ש $(\bigcup O_i)^c \subseteq O_i^c$ ולכן $|(\bigcup O_i)^c| \leq |O_i^c| < \infty$. מסקנה: $\bigcup O_i \in \tau_2$.

חיתוכים סופיים: יהיו $O_1, ..., O_n$ קבוצות בτ_2. אם לכולן יש משלים סופי, אז $(O_1 \cap ... \cap O_n)^c = O_1^c \cup ... \cup O_n^c$, איחוד סופי של קבוצות סופיות ולכן סופי. אחרת, יש $1 \leq i \leq n$ כך ש $1 \notin O_i \Longleftarrow 1 \notin O_1 \cap ... \cap O_n \Longleftarrow O_1 \cap ... \cap O_n \in \tau_2$.

ב. שימו לב ש$\tau_1 \subseteq \tau_2$.

- הפונקציה הזאת אינה רציפה, כי $\{2\}$ פתוח בτ_2, אבל המקור שלו הוא $\{2\}$ שאינו פתוח בτ_1.
- הפונקציה הזאת רציפה כי $\tau_2 \subseteq \tau_1$. כלומר, יהי $O \in \tau_1$. אז $f^{-1}(O) = O \in \tau_2$.
- הפונקציה הזאת אינה רציפה, כי $\{2\}$ פתוח בτ_2, אבל המקור שלו הוא $\{2\}$ שאינו פתוח בτ_1.
- הפונקציה רציפה. הוכחה: נוכיח את התנאי השקול על קבוצות סגורות. תהי $A \subseteq \mathbb{N}$ סגורה לפי הטופולוגיה τ_1. אם $A = \mathbb{N}$, אז $g^{-1}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, סגורה ב$\tau_2$. אחרת, A סופית. נשים לב שלכל איבר שאינו 1 יש בדיוק מקור אחד. לכן, אם $1 \notin A$, אז $g^{-1}(A)$ סופית, ולכן סגורה בτ_2. אחרת, $1 \in A$. נשים לב ש$g(1) = 1$. לכן $1 \in g^{-1}(A)$, ולכן $g^{-1}(A)$ סגורה בτ_2. מש"ל.

5. נגדיר את הישר של סורגנפריי להיות T= כל האיחודים של ב$\mathbb{R}$ של קטעים מהצורה $[a.b)$.

א. הוכיחו שT מהווה טופולוגיה על $\mathbb{R}$.

ב. נסמן את הטופולוגיה האוקלידית על $\mathbb{R}$ בτ. הוכיחו ש $\tau \subset T$ (הכלה ממש).

ג. הוכיחו ש$\frac{1}{n} \to 1$ בT

א. קבוצה ריקה היא איחוד ריק של קטעים כאלו, ו$\mathbb{R}$ הוא איחוד של כל הקטעים מהצורה הזו, ולכן הם פתוחים.

יהיו O_i קבוצות פתוחות. כל $O_i = \bigcup_j B_{i,j}$ כאשר $B_{i,j}$ הם קטעים מהצורה הזו. אז $\bigcup O_i = \bigcup_{i,j} B_{i,j}$ הוא איחוד של קטעים מהצורה הזו.

יהיו O_1 וO_2 קבוצות פתוחות. $O_1 = \bigcup_i B_{1,i}$ ו$O_2 = \bigcup_j B_{2,j}$. אז $O_1 \cap O_2 = \bigcup_{i,j}(B_{1,i} \cap B_{2,j})$. וחיתוך של שני קטעים מהצורה הזו נותן קטע מהצורה הזאת.

ב. קבוצה פתוחה ב$\mathbb{R}$ היא איחוד של קטעים פתוחים. נוכיח שכל קטע פתוח נמצא בT ואז גם כל קבוצה פתוחה תהיה (כי T סגור לאיחודים כלשהם). יהי קטע פתוח (a,b). הוא שווה ל $(a,b) = \bigcup[a+\frac{1}{n}, b)$. איחוד של קטעים חצי סגורים חצי פתוחים, ולכן נמצא בT.

מוכל ממש: למשל $[0,1) \in T$ ולאה פתוח בטופולוגיה האוקלידית.

ג. תהי $O \in T$ קבוצה פתוחה שמכילה את 0 . מכיוון שהיא שווה לאיחוד של קטעים, יש קטע $[x,y)$ כך ש $0 \in [x,y) \subseteq O$. כלומר, $x \leq 0$ ו $0 < y$. אז בהכרח יש n כל ש $\frac{1}{n} < y$, ונקבל שהחל ממנו, לכל $m > n$, $\frac{1}{m} < y$. כלומר, $\frac{1}{m} \in [x,y) \subseteq O$. כלומר, הוכחנו התכנסות.

6. תהי נקודה $p \notin \mathbb{R}$. נגדיר $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$. נסתכל על האוסף הבא: $\tau = \{O \subseteq X : \ p \notin O \vee |O^c| \leq \aleph_0\}$.

א. הוכיחו $x_n \to x$ בτ, וY מרחב טופולוגי כלשהו, $f : X \to Y$, אז $f(x_n) \to f(x)$.

ב. תנו דוגמא למרחב טופולוגי מטריזבילי Y ופונקציה $f : X \to Y$ שאינה רציפה.

ג. הסיקו משני הסעיפים הקודמים ש(X, τ) אינו מטריזבילי.

א. הראינו בכיתה שבמרחב הזה סדרה מתכנסת אמ"ם היא קבועה לבסוף. לכן $\{x_n\}$ קבועה לבסוף על x. ולכן גם $\{f(x_n)\}$ קבועה לבסוף על $f(x)$. מסקנה: $f(x_n) \to f(x)$. (כי כל סדרה קבועה לבסוף מתכנסת).

ב. נגדיר על Y את המטריקה הדיסקרטית, ותהי f פונקציית הזהות. היא לא רציפה, כי למשל $\{p\}$ פתוח בדיסקרטית, אבל $f^{-1}\{p\} = \{p\}$ לא פתוח בτ.

ג. אם τ הייתה מטריזבילית, אז כל פונקציה ממנה לתוך מרחב מטריזבילי הייתה צריכה להיות רציפה, כי ראינו בסעיף א' שכל פונקציה ממנו שומרת התכנסות, וידוע שבמרחבים מטריים פונקציה שומרת התכנסות היא בהכרח רציפה. אולם ראינו בסעיף ב' שקיימת פונקציה לא רציפה שיוצאת ממנה.

7. א. יהי X מ"ט אינסופי, שבו כל הקבוצות האינסופיות פתוחות (אבל לא בהכרח רק הם). הוכיחו שזהו מרחב דיסקרטי.

ב. יהי X מרחב טופולוגי קו־סופי, ונניח שיש בו 3 קבוצות סגוחות (כלומר, גם סגורות וגם פתוחות). הוכיחו שX סופית.

ג. יהי X מרחב טופולוגי אינסופי, שהקבוצה האינסופית היחידה שפתוחה בו היא X. האם X הוא המרחב הטופולוגי הטריוויאלי? (כלומר: $\tau = \{\emptyset, X\}$).

פתרון:

א. הוכחה: נוכיח שכל הנקודונים פתוחים. (שימו לב שזה מספיק, כי כל קבוצה היא איחוד כלשהו של נקודונים. אז אם כל נקודון פתוח כל קבוצה תהיה פתוחה, כאיחוד של קבוצות פתוחות). יהי $x \in X$, ונרצה להראות ש$\{x\}$ פתוח. ידוע מבדידה שכל קבוצה אינסופית ניתן לחלק לשתי קבוצות אינסופיות זרות. נניח ש $X = Y_1 \cup Y_2$, כך שY_1 וY_2 אינסופיות וזרות. נניח בה"כ ש $x \in Y_1$. נסתכל על הקבוצות: $Y_1, Z = Y_2 \cup \{x\}$. שתיהן אינסופיות ולכן פתוחות. בנוסף, $Y_1 \cap Z = \{x\}$. לכן הנקודון $\{x\}$ פתוח כחיתוך סופי של קבוצות פתוחות. מש"ל.

ב. $\emptyset$ וX הן תמיד קבוצות סגוחות. אם יש 3 קבוצות סגוחות, זה אומר שיש קבוצה סגוחה לא טריוויאלית. כלומר, $A \neq \emptyset, X$ סגוחה. A סגורה ושונה מX ולכן A סופית. בנוסף, A^c סגורה (כי A פתוחה) ושונה מX (כי $A \neq \emptyset$), ולכן A^c סופית. $X = A \cup A^c$ איחוד סופי של קבוצות סופיות הוא קבוצה סופית.

ג. לא. דוגמא: נקח את $\mathbb{N}$ ונגדיר עליה את הטופולוגיה הבאה: $\{\emptyset, \{1\}, \mathbb{N}\}$. בדקו שזו אכן טופולוגיה. היא לא טריוויאלית, כי $\{1\}$ פתוח. אבל הקבוצה האינסופית הפתוחה היחידה היא המרחב כולו.

8. יהי (X, τ) מרחב טופולוגי. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

א. הטופולוגיה טריויאלית.

ב. לכל סדרה x_n ו $x \in X$ מתקיים $x_n \to x$ (כל סדרה מתכנסת לכל מספר)

נניח שהטופולוגיה טריויאילית. ניקח סדרה x_n כלשהיא ואיבר x. צריך להוכיח ש $x_n \to x$. תהי U קבוצה פתוחה כלשהיא כך ש $x \in U$. היות שהטופולוגיה טריויאלית, בהכרח $U = X$. ולכן בוודאי $x_n \in X$ החל מ n מסוים (במקרה $n = 1$) ולכן $x_n \to X$. בכיוון השני, נניח שכל סדרה מתכנסת לכל מספר אבל הטופולוגיה לא טריויאלית. אז יש קבוצה פתוחה $U \neq \emptyset, X$ אז ניקח איזשהיא סדרה x_n שכל איבריה ב $X \backslash U$ ואיבר $x \in U$ אבל לפי הנתון $x_n \to x$ ולכן משלב מסוים $x_n \in U$ בסתירה.

9. תהי $f : (X, \tau_1) \to (Y, \sigma_1)$ פונקציה רציפה בין 2 מרחבים טופולוגיים. נניח כי $\tau_1 \subseteq \tau_2$ ו $\sigma_2 \subseteq \sigma_1$. הוכיחו כי

$$f : (X, \tau_2) \to (Y, \sigma_2)$$

היא גם רציפה. (על אותו עקרון, שימו לב לעובדה הבאה: כל פונקציה לתוך מרחב טריויאלי היא רציפה. כל פונקציה מתוך מרחב דיסקרטי היא רציפה).

תהי U קבוצה פתוחה ב σ_2. אזי היא פתוחה גם ב σ_1 היות ש $f : (X, \tau_1) \to (Y, \sigma_1)$ רציפה אז $f^{-1}(U)$ פתוחה ב τ_1 ולכן היא גם פתוחה ב τ_2. לכן $f : (X, \tau_2) \to (Y, \sigma_2)$

רצפיה כנדרש. על אותו עקרון כל פונקציה $f : X \to Y$ לתוך מרחב טריויאלי Y היא רציפה (כי הפתוחות היחידות הן $\emptyset, Y$ והמקורות שלהן הם $f^{-1}(Y) = X \quad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset,$ שהן פתוחות. כמו כן כל פונקציה $f : X \to Y$ מתוך מרחב דיסקרטי X היא רציפה כי המקור של כל קבוצה היא קבוצה פתוחה.