

חשבון אינפיניטסימלי 4 (88-236-01) מועד א', תשע"ב

המרצה: פרופ' אנדריי לרנר

משך המבחן: 2.5 שעות

ללא שימוש בחומר עזר

ענו על 5 השאלות הבאות. ערך כל שאלה: 21 נקודות. שאלה 6 היא נוספת (ערך השאלה הוא 10 נקודות על התנאי שהפתרון יהיה מלא).

1. תהי $M \subset \mathbb{R}^3$ קבוצה המוגדרת ע"י

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^3 + z^2 = -1/2, x + y + z = 0\}.$$

(א) האם קבוצה זו היא יריעה? אם כן, מהו מימדה?
(ב) מצאו מרחב משיק ל- M בנקודה $(1/2, -1, 1/2)$.

2. (א) תהי ω תבנית k -מ- $C^2(\mathbb{R}^n)$. הראו ש- $d^2\omega = 0$. נמק תשובתך.
(ב) חשבו את הערך של התבנית $w = dx \wedge dy + dz \wedge dx$ על הוקטורים

$$\xi_1 = (1, 2, 3), \xi_2 = (-2, 1, -1)$$

3. יהי $\vec{F} = -\frac{y}{(x-y)^2}\vec{i} + \frac{x}{(x-y)^2}\vec{j}$ שדה וקטורי על

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x\}$$

(א) האם \vec{F} סגור?

(ב) האם \vec{F} משמר?

(ג) אם התשובה ל- (ב) חיובית מצאו את הפוטנציאל של \vec{F} ב- Ω .

(ד) בעזרת (ג) חשבו את

$$\int_{\Gamma} -\frac{y}{(x-y)^2}dx + \frac{x}{(x-y)^2}dy$$

כאשר Γ עקומה כלשהי המחברת את $A = (0, -1)$ ו- $B = (1, 0)$ (בכיוון מ- A ל- B) שנמצת ב- Ω .
מה האינטגרל הזה אומר על השדה \vec{F} ?

4. מצאו שטח הפנים של חלק הספירה:

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 16, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z\}$$

5. בעזרת משפט סטוקס חשבו

$$\int_{\Gamma} (2x + y + 2z)dx + (x + 2y + 2z)dy + (x + y + 2z)dz$$

כאשר Γ היא חיתוך של הגליל $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4, z \in \mathbb{R}\}$ עם המישור $x + 2z = 2$ והכיוון על Γ נגד כיוון השעון אם מסתכלים מכיוון חיובי של ציר Ox .

6. (10 נק') הוכח שהאינטגרל $\int_{\Gamma} \omega$ אינו תלוי במסלול אם ורק אם ω היא תבנית מדוייקת.

בהצלחה!