אינפי 4 – תרגול 5

אי תלות במסלול – שדות משמרים

העקומה C , שלאורכה מחושב אינטגרל קווי, נקראת לעתים מסלול האינטגרציה. בדוגמא הבאה נראה, שמסלולי אינטגרציה שונים בין שתי נקודות שונות יכולים להוביל לאותו ערך של האינטגרל המחושב.

דוגמא:

תהי $F\left(x,y\right)=yi+xj$. חשב את האינטגרל הקווי - $\int_C F\cdot dr$ לאורך כל אחד מקטעי העקומות דלקמן:

1. הישר $y=x$ מ $\left(0,0\right)$ ל $\left(1,1\right)$
2. הפרבולה $y=x^2$, מ $\left(0,0\right)$ ל $\left(1,1\right)$
3. העקומה $y=x^3$ מ $\left(0,0\right)$ ל $\left(1,1\right)$

פתרון:

א. באמצעות הפרמטר $t=x$ ניתן לייצג את מסלול האינטגרציה על ידי- $\left(0\le t\le 1\right)\quad x=t,y=t$. לכן

$$\int_C F\cdot dr=\int_C\left(yi+xj\right)\left(dxi+dyj\right)=\int_C ydx+xdy=\int_0^1 2t=1$$

ב. באמצעות הפרמטר $t=x$ ניתן לייצג את מסלול האינטגרציה על ידי- $\left(0\le t\le 1\right)\quad x=t,y=t^2$. לכן

$$\int_C F\cdot dr=\int_C ydx+xdy=\int_0^1 3t^2=1$$

ג. באמצעות הפרמטר $t=x$ ניתן לייצג את מסלול האינטגרציה על ידי- $\left(0\le t\le 1\right)\quad x=t,y=t^3$. לכן

$$\int_C F\cdot dr=\int_C ydx+xdy=\int_0^1 4t^3=1$$

התוצאות שהתקבלו בדוגמא לעיל אינן מקריות : כל מסלול חלק למקוטעין C מ $\left(0,0\right)$ ל $\left(1,1\right)$ היה נותן את אותה התוצאה. על אינטגרל קווי , שליש לו אותו ערך לאורך כל המסלולים החלקים למקוטעין מנקודת קצה אחת לשנייה אומרים שהוא *אינו תלוי במסלול*.

משפט: נניח כי $F\left(x,y\right)=f\left(x,y\right)i+g\left(x,y\right)j$, כאשר f ו g הן פונקציות רציפות בתחום פתוח כלשהו D , המכיל את הנקודות $\left(x_0,y_0\right)$ ו $\left(x_1,y_1\right)$. אם $F\left(x,y\right)=\nabla\phi\left(x,y\right)$ בכל נקודה ב D , אז

לכל עקומה חלקה למקוטעין C שתחילתה ב $\left(x_0, y_0\right)$ וסופה ב $\left(x_1, y_1\right)$, והמוכלת כולה ב D ,
מתקיים - $\int_C F\cdot dr=\phi\left(x_1, y_1\right)-\phi\left(x_0, y_0\right)$.

הגדרה: שדה וקטורי F נקרא שדה משמר בתחום D , אם F הוא הגרדיינט של פונקציית פוטנציאל ϕ ב D , לאמור, $F\left(x, y\right)=\nabla\phi\left(x, y\right)$.

משפט: יהי $F\left(x, y\right)=f\left(x, y\right)i+g\left(x, y\right)j$, כאשר f ו g הן פונקציות רציפות בתחום פתוח וקשיר D. אז שלוש התכונות שלהן שקולות זו לזו:

א. $F\left(x, y\right)$ הוא שדה וקטורי משמר ב D .

ב. $\int_C F\cdot dr$ לכל עקומה סגורה חלקה למקוטעין ב D .

ג. $\int_C F\cdot dr$ אינו תלוי מסלול, לכל עקומה חלקה למקוטעין ב D .

משפט: (מבחן השדה המשמר) יהי $F\left(x, y\right)=f\left(x, y\right)i+g\left(x, y\right)j$ כאשר f ו g הן פונקציות בעלות נגזורת חלקיות רציפותמסדר ראשון בתחום פתוח פשוט קשר D במישור. אז F הוא שדה משמר ב D, אם ורק אם $\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}$ בכל נקודה ב D .

דוגמא: יהי $F\left(x, y\right)=2xy^3i+\left(1+3x^2y^2\right)j$

א. הראה ש F הוא שדה משמר בכל מישור xy .

ב. מצא פונקציית פוטנציאל ϕ, על ידי אינטגרציה של $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ תחילה.

פתרון:

א. $f\left(x, y\right)=2xy^3, g\left(x, y\right)=1+3x^2y^2$. ע"י גזירה נקבל $\frac{\partial g}{\partial x}=6xy^2=\frac{\partial f}{\partial y}$ ולכן זהו שדה משמר.

ב. מכיוון שהשדה F הוא שדה משמר, יש פונקציית פוטנציאל ϕ המקיימת:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=2xy^3, \frac{\partial\phi}{\partial y}=1+3x^2y^2$$

אינטגרציה לפי x של המשוואה השמאלית , כאשר רואים ב y קבוע, מניבה –

$$\phi=\int 2xy^3dx=x^2y^3+k\left(y\right)$$

$k\left(y\right)$ מייצג את קבוע האינטגרציה. כדי למצוא את $k\left(y\right)$, גוזרים את המשוואה לפי y , ומשתמשים במשוואה הימנית . מתקבל –

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=3x^2y^2+k'\left(y\right)=1+3x^2y^2$$

מכאן ש $k'(y)=1$, ולכן $k(y)=y+K$. כאשר K הוא קבוע אינטגרציה. הצבת $k(y)$ במשוואה מניבה $\phi=x^2y^3+y+K$. מנוכחותו של קבוע K כלשהו אנו למדים ש ϕ אינה יחידה. בדוק שאכן $\nabla\phi=F$.

דוגמא: בעזרת פונקציית הפוטנציאל שמצאנו בדוגמא 3, חשב את האינטגרל –

$$\int_{(1,4)}^{(3,1)} 2xy^3dx+\left(1+3x^2y^2\right)dy$$

פתרון: במקום האינטגרנג ניתן לרשום $F\cdot dr$, כאשר F הוא השדה הוקטורי שהדוגמא הקודמת. מהמשפט שראינו ופונקציית הפוטנציאל $\phi=x^2y^3+y+K$ יתנו אפוא –

$$\int_{(1,4)}^{(3,1)} 2xy^3dx+\left(1+3x^2y^2\right)dy=\int_{(1,4)}^{(3,1)} F\cdot dr=\phi(3,1)-\phi(1,4)=(10+K)-(68+K)=-58$$