1. האם $V=\mathbb{R}^2$ הוא מרחב וקטורי ביחס לחיבור "רגיל" וכפל בסקלר $\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha x \\ y \end{pmatrix}$

פתרון: בהרצאה הוכחתם את הטענה הבאה: בכל מרחב וקטורית הסקלר 0 כפול כל וקטור שווה לוקטור האפס.

במקרה שלנו הסקלר 0 הוא 0 של הממשיים.

וקטור האפס הוא $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

אבל $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot 0$

לכן זה לא מרחב וקטורי.

2. האם $V=\mathbb{R}^2$ הוא מרחב וקטורי ביחס לחיבור "רגיל" וכפל בסקלר $\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^2 x \\ \alpha^2 y \end{pmatrix}$.

פתרון: נעבור על התכונות שקשורות לכפל בסקלר:

(א) קיבוציות:

$$(\alpha\beta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\alpha(\beta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$$

$$(\alpha\beta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\alpha\beta)^2 x \\ (\alpha\beta)^2 y \end{pmatrix}$$

$$\alpha(\beta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})=\alpha\begin{pmatrix} \beta^2 x \\ \beta^2 y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^2\beta^2 x \\ \alpha^2\beta^2 y \end{pmatrix}$$

(ב) סגירות: ברור

(ג) פילוג:

$$(\alpha+\beta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(\alpha+\beta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\alpha+\beta)^2 x \\ (\alpha+\beta)^2 y \end{pmatrix}$$

$$\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^2 x \\ \alpha^2 y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \beta^2 x \\ \beta^2 y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\alpha^2+\beta^2) x \\ (\alpha^2+\beta^2) y \end{pmatrix}$$

זה לא בהכרח אותו דבר. למשל:

$$(1+1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\neq 1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

תכונות הפילוג לא מתקיימת, ולכן זה לא מרחב וקטורי.

3. יהא W ת"מ של V. הוכיחו $0_W = 0_V$
הסבר: לכל מרחב וקטורי יש איבר שנטרלי לחיבור.
כלומר, 0_v הוא האיבר הנטרלי לחיבר בV.
0_W הוא איבר בW שנטרלי לחיבור עם איברי W.
פתרון: יהי $w \in W$. (קיים וקטור, כי מרחב וקטורי הוא לא ריק)=

$$w + 0_w = w$$

$w \in V$ כי $V \subseteq W$. לכן

$$w + 0_V = w$$

$$w + 0_W = w + 0_v$$

נחבר לw את הנגדי שלו בV

$$0_V + 0_W = 0_V + 0_V$$

ניזכר כי $0_W \in V$ ולכן

$$0_W = 0_V$$

4. הוכיחו/הפריכו: W הוא תת מרחב של V במקרים הבאים:

(א) $V = \mathbb{R}^2$ ו $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid 0 \leq x, y \right\}$

פתרון: לא. כי לא סגור לנגדי. למשל, (שימו לב, הוא גם לא סגור לכפל בסקלר)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$$

אבל

$$-\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin W$$

1. $V = \mathbb{R}^2$ ו $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid (0 \leq x, y) \vee (0 \geq x, y) \right\}$

פתרון: לא. כי לא סגור לחיבור. למשל,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W$$

2. $V=\mathbb{R}^2$ ו $W=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y=3x\right\}$

פתרון: אפשר להציג את הקבוצה W באופן הבא:

$$W=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid -3x+y=0\right\}=N\left(\begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

הוכחתם בהרצאה שאוסף הפתרונות של מערכת הומוגנית, $N(A)$, הוא תמיד תת מרחב.

3. $V=\mathbb{F}^{n\times n}$ ו $W=\{A \mid \forall i<j:\ A_{i,j}=0\}$ (המטריצות המשולשיות התחתונות).

פתרון: בשביל לבדוק אם קבוצה היא תת מרחב, צריך לבדוק 3 דברים (הקריטריון המקוצר):

0 נמצא, סגירות לחיבור, סגירות לכפל בסקלר. $(v+\alpha u\in W)$

איבר ה0: מטריצת האפס היא מטריצה משולשית תחתונה ולכן נמצאת בW.

סגירות לחיבור: אם $A,B\in W$ אז כל אחד מהם היא מטריצה משולשית תחתונה.

$$\forall i<j (A+B)_{i,j}=A_{i,j}+B_{i,j}=0+0=0$$

כלומר $A+B$ היא מטריצה משולשית תחתונה ולכן $A+B\in W$

סגירות לכפל בסקלר: אם $A\in W$ ו$\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\forall i<j, (\alpha A)_{i,j}=\alpha(A_{i,j})=\alpha\cdot 0$$

לכן αA היא מטריצה משולשית תחתונה. כלומר, $\alpha A\in W$.

לכן W הוא תת מרחב.

4. $V=\mathbb{F}^{n\times n}$ ו $W=\{A \mid \exists B:\ AB=I\}\cup\{0\}$ קבוצת המטריצות ההפיכות ביחד עם מטריצת האפס.

פתרון: קיום 0 - ברור.

סגירות לחיבור: לא. למשל,

$$A=I, B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\in W$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\notin W$$

לכן לא תת מרחב.

5. $V=\mathbb{F}^{n\times n}$ ו $W=\{A \mid A^t=A\}$

פתרון: איבר ה0 - נמצא. מטריצת ה0 היא סימטרית.

סגירות לחיבור: יהיו $A,B\in W$. כלומר, $A=A^t$ ו$B=B^t$. אזי

$$(A+B)^t=A^t+B^t=A+B$$

לכן $A+B$ סימטרית. כלומר, $A+B\in W$.

כפל בסקלר: יהי $A\in W$ ו$\alpha\in\mathbb{R}$

$$(\alpha A)^t=\alpha A^t=\alpha A$$

קיבלנו ש$\alpha A \in W$
לכן W הוא תת מרחב.

6. $V = \mathbb{F}^{n\times n}$ ו $W = \{A \mid A^t = -A\}$ הוא גם תת מרחב, בדומה לסעיף הקודם.

7. $V = \mathbb{F}^{n\times n}$ ו $W = \{A \mid A^t = A\} \cup \{A \mid A^t = -A\}$.
פתרון: לא תת מרחב. נסמן

$$W_1 = \left\{A \mid A^t = A\right\}, W_2 = \left\{A \mid A^t = -A\right\}$$

ראינו בסעיפים קודמים ששתי הקבוצות האלו הן תתי מרחבים.
בהרצאה הוכחתם את המשפט הבא: איחוד של שני תתי מרחבים הוא תת מרחב רק במידה שאחד מהם מוכל בשני.
במקרה שלנו, אף אחת מהקבוצות לא מוכלת בשניה.
הוכחה נוספת: לא מתקיים סגירות לחיבור. כי למשל,

$$I, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in W$$

אבל

$$I + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \notin W$$

8. $V = \mathbb{F}^{n\times n}$ ו $W = \{A \mid tr(A) = 0\}$.
פתרון: כן.
איבר ה0 נמצא. מטריצת האפס מקיימת שהטרייס שלה הוא 0.
סגירות חיבור: יהיו $A, B \in W$. כלומר, $tr(A), tr(B) = 0$

$$tr(A + B) = tr(A) + tr(B) = 0 + 0 = 0$$

לכן $A + B \in W$
סגירות לכפל בסקלר: יהי $A \in W$ ו$\alpha \in \mathbb{F}$, אז:

$$tr(\alpha A) = \alpha tr(A) = \alpha \cdot 0 = 0$$

לכן $\alpha A \in W$.

9. $V = \mathbb{R}_2[x]$ ו $W = \{a + bx \mid b \neq 0\}$
האיברים בV הם מהצורה:

$$a + bx + cx^2$$

פתרון: לא תת מרחב. איבר ה0 לא נמצא. כי איבר ה0 הוא פולינום האפס, כלומר הפולינם:

$$0 + 0x + 0x^2$$

והוא לא עונה על התנאים של W ולכן לא נמצא בW.

10. $V = \mathbb{R}_2[x]$ ו $W = \{p(x) \mid p(2) = 0\}$
פתרון: פולינום האפס נמצא, כי

$$0(2) = 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2^2 = 0$$

סגירות לחיבור: יהיו $p, q \in W$. כלומר, $p(2) = 0, q(2) = 0$.

$$(p + q)(2) = p(2) + q(2) = 0 + 0 = 0$$

לכן $p + q \in W$.
סגירות לכפל בסקלר: יהיו $p \in W$ ו$\alpha \in \mathbb{R}$.

$$(\alpha p)(2) = \alpha(p(2)) = \alpha \cdot 0 = 0$$

כלומר, $\alpha p \in W$.
קיבלנו שW הוא תת מרחב.

11. במרחב $V = \mathbb{F}^{n \times n}$, מצאו את החיתוך והסכום של $W_1 = \{A \mid \forall i > j : A_{i,j} = 0\}$ קבוצת המטריצות המשולשיות העליונות ו $W_2 = \{A \mid \forall i < j : A_{i,j} = 0\}$קבוצת המטריצות המשולשיות התחתונות.
פתרון:

$$W_1 \cap W_2 = \{\text{matrices diagonal}\}$$

אוסף המטריצות האלכסניות.
מסקנה: אוסף המטריצות האלכסוניות הוא תת מרחב.

$$W_1 + W_2 = \mathbb{F}^{n \times n}$$

תזכורת: סכום של W_1 וW_2 זה כל האיברים שאפשר לכתוב כ$w_1 + w_2$ כאשר $w_1 \in W_1$ ו$w_2 \in W_2$.
אז אנחנו צריכים להראות שכל מטריצה ריבועית ניתן לכתוב כסכום של מטריצה משולשית עליונה ומטריצה משולשית תחתונה.
דוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

הערה: אפשר לכתוב את הסכום בכמה דרכים.
באופן כללי: תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$

$$A = B + C$$

$$B_{i,j} = \begin{cases} A_{i,j} & i \le j \\ 0 & i > j \end{cases}, C_{ij} = \begin{cases} A_{i,j} & i > j \\ 0 & i \le j \end{cases}$$

קל לראות שB משולשית עליונה, C משולשית תחתונה, ו$A = B + C$.

12. במרחב $V = \mathbb{F}^n$, מצאו את החיתוך והסכום של $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_1 = \cdots = a_n \right\}$ ו $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid \sum_{i=1}^n a_i = 0 \right\}$

פתרון:

$$W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

הסבר: $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in W_1 \cap W_2$ אם $a_1 = ... = a_n$ וגם $\Sigma a_i = 0$. אז כל הרכיבים חייבים להיות שווים ל0.

$$W_1 + W_2 = \mathbb{F}^n$$

יהי $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$, נסמן $c = \dfrac{\Sigma a_i}{n}$.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ \vdots \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 - c \\ \vdots \\ a_n - c \end{pmatrix}$$

נשים לב ש$\begin{pmatrix} a_1 - c \\ \vdots \\ a_n - c \end{pmatrix} \in W_2$. הסבר: $a_1 - c + ... + a_n - c = (a_1 + ... + a_n) - nc = 0$

האם זאת הדרך היחידה לפרק וקטור לסכום של שני וקטורים, מW_1 ומW_2?
נניח ש

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

כך ש$\Sigma b_i = 0$.
אז מתקיים ש:

$$a_1 + ... + a_n = (x + b_1) + ...(x + b_n) = nx$$

לכן $x = \frac{\Sigma a_i}{n}$
ואז הb_i נקבעים אוטומטית.
כלומר, כל וקטור אפשר לכתוב בדרך אחת בלבד כסכום של וקטור מW_1 עם וקטור מW_2.

13. במרחב $V = \mathbb{R}_2[x]$, מצאו את החיתוך והסכום של $W_1 = \{p(x) \,|\, p(2) = 0\}$ ו $W_2 = \{p(x) \,|\, p(x) = x \cdot p'(x)\}$.
פתרון: בואו נבין איך נראים האברים בW_2.

$$a + bx + cx^2 = x(b + 2cx) = bx + 2cx^2$$

אז חייב להתקיים: $a = 0, c = 0$.
כלומר, $W_2 = \{bx\}$.

$$W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

$$W_1 + W_2 = \mathbb{R}_2[x]$$

יהי $a + bx + cx^2$ פולינום כלשהו ב$\mathbb{R}_2[x]$. נסמן $k = (a + 2b + 4c)$

$$a + bx + cx^2 = [a + (b - \frac{k}{2})x + cx^2] + \frac{k}{2}x$$