הודעות/תזכורות:
תקבלו מחר מייל שמסביר איך מתבצע הבוחן.
בוחן בלינארית ביום שלישי הבא, ביום שלישי נודיע מה החומר הסופי. (עד תלות ופרישה בוודאות. ייתכן גם בסיס ומימד).

1. תרגיל: במרחב $V=\mathbb{R}^4$, מצאו בסיס ל W_1, W_2 ולסכום ולחיתוך שלהם כאשר $W_1 = span\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ ו $W_2=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix} \mid \begin{matrix}a_1-3a_2-5a_3=a_4\\4a_2+8a_3-2a_4=2a_1\end{matrix}\right\}$

פתרון:
ראשית, נמצא בסיס לכל אחד מהמרחבים.
כאשר המרחב נתון כ$span$, אז בשביל למצוא בסיס ניקח את הוקטורים הפורשים, ונצמצם לבסיס.
במקרה של W_1 אין צורך לצמצם לבסיס, כי הוקטורים הנתונים הם בת"ל (שני וקטורים, שאף אחד הוא לא כפולה של השני הם בת"ל).
בסיס לW_1-

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

בשביל למצוא בסיס למרחב שנתון ע"י משוואות, צריך לפתור את מערכת המשוואות. הבסיס שניקח הוא הפתרונות היסודיים (פתרונות פונדמנטליים)

$$\begin{pmatrix}1&-3&-5&-1\\-2&4&8&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2+2R_1}\begin{pmatrix}1&-3&-5&-1\\0&-2&-2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{-0.5R_2}\begin{pmatrix}1&-3&-5&-1\\0&1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1+3R_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-2&5\\0&1&1&2\end{pmatrix}$$

מציבים

$$a_3=t, a_4=s$$

$$a_1=2t-5s$$

$$a_2=-t-2s$$

$$\begin{pmatrix}2t-5s\\-t-2s\\t\\s\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-5\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

בסיס לW_2 הוא:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

עכשיו נמצא בסיס לסכום.

$$W_1 + W_2 = span\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} + span\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} =$$

$$span\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

זאת קבוצה פורשת. אנחנו עדיין לא יודעים אם היא בסיס. צריך לצמצם לבסיס.
נשים את הוקטורים בעמודות ונדרג. העמודות שבהן יש איבר מוביל- יהוו בסיס.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - \frac{11}{3} R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן בסיס לסכום הוא: $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

בסיס לחיתוך: בשביל למצוא חיתוך של מרחבים, נעביר אותם לצורה של משוואות

$$W_1 = span\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & a_1 \\ -1 & 1 & a_2 \\ 1 & 0 & a_3 \\ 0 & 1 & a_4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a_3 \\ -1 & 1 & a_2 \\ 2 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - 2R_1]{R_2 + R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a_3 \\ 0 & 1 & a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & a_1 - 2a_3 \\ 0 & 1 & a_4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 - R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a_3 \\ 0 & 1 & a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & a_1 - 2a_3 \\ 0 & 0 & a_4 - a_2 - a_3 \end{array}\right)$$

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} : a_1 - 2a_3 = 0 \wedge a_4 - a_2 - a_3 = 0 \right\}$$

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} : a_1 - 2a_3 = 0 \wedge a_4 - a_2 - a_3 = 0, \quad \begin{array}{c} a_1 - 3a_2 - 5a_3 = a_4 \\ 4a_2 + 8a_3 - 2a_4 = 2a_1 \end{array} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -5 & -1 \\ -2 & 4 & 8 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4+2R_1]{R_3-R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4-2R_2]{R_3-3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נמצא פתרון כללי למערכת המשוואות: $a_3 = t$ ולכן

$$a_4 = 0, a_1 = 2t, a_2 = -t$$

פתרון יסודי:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

זה בסיס לחיתוך.

הערה במקרה שלנו: אחרי שמצאנו את האיחוד, יכולנו לדעת מה המימד של החיתוך, לפי משפט המימדים

$$\dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1 + W_2)$$

אחרי שגילינו את המימדים של המרחבים ושל הסכום, יכולנו להסיק שמימד החיתוך הוא 1.

וידענו על וקטור מסויים שנמצא בחיתוך: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. ולכן החיתוך הוא הspan של הוקטור הזה.

2. תרגיל: במרחב $V=\mathbb{R}_3[x]$, מצאו בסיס ל W_1,W_2 ולסכום ולחיתוך שלהם כאשר $W_1 =$ $span\left\{2-x+x^2,x+x^3\right\}$ ו $W_2=\left\{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 \mid \begin{array}{c} a_0-3a_1-5a_2=a_3 \\ 4a_1+8a_2-2a_3=2a_0 \end{array}\right\}$

פתרון: W_1 נפרש ע"י שני וקטורים. צריך לבדוק אם הם תלויים לינארית. מכיוון שאף אחד הוא לא כפולה בסקלר של השני, אנחנו יודעים שהם בת"ל ולכן בסיס.

בשביל למצוא בסיס לW_2: נפתור את מערכת המשוואות, והבסיס הוא הפולינום שמהווים את הפתרונות היסודיים. $a_2=t,a_3=sa_0=2t-5sa_1=-t-2s$

פתרון כללי:

$$2t-5s+(-t-2s)x+tx^2+sx^3$$

אלה הפתרונות של המערכת. ולכן הבסיס הוא: $\left\{2-x+x^2,-5-2x+x^3\right\}$
איך מוצאים בסיס לסכום? מאחדים את הבסיסים של שני המרחבים, מקבלים ספאן של 4 פולינומים. צריך לבדוק מי התת קבוצה הבת"ל המקסימלית.
ובשביל למצוא חיתוך- מעבירים את W_1 למשוואות, ומוצאים את הפתרון של המשוואות. הפתרונות היסודיים יהיו הבסיס.

3. יהא V מ"ו $\dim V=n$. יהא W ת"מ $\dim W=n-1$. הוכיחו שכל ת"מ U של V שאינו מוכל ב W מקיים כי $W+U=V$

פתרון: ידוע ש$U+W\subseteq V$. לכן $\dim(U+W)\leq \dim V$

$$n\geq \dim(U+W)=\dim(U)+\dim W-\dim(U\cap W)=$$

$$n-1+\dim U-\dim(U\cap W)$$

ניתן להסיק ש

$$0\leq \dim(U)-\dim(U\cap W)\leq 1$$

מצד שני, ידוע ש$U\cap W\subseteq U$. ולכן $\dim(U\cap W)\leq \dim(U)$
אם $\dim(U)-\dim(U\cap W)=0$ אז $\dim U=\dim(U\cap W)$. הכלה ושויון מימדים גורר שוויון. כלומר, היינו מקבלים ש$U=U\cap W$. זה אומר ש $U\subseteq W$. סתירה להנחה. ולכן

$$\dim(U)-\dim(U\cap W)=1$$

ומכאן

$$\dim(U+W)=$$

$$\dim(U)+\dim W-\dim(U\cap W)=n-1+(\dim U-\dim(U\cap W))=n-1+1=n$$

מהכלה ושוויון מימדים נקבל שV $U+W=V$.
דרך נוספת: $\dim(W)=n-1$. נקח בסיס $\{w_1,...,w_{n-1}\}$. נתון שW $U\nsubseteq W$. כלומר, קיים $u\in U$, $u\notin W$. לכן $u\notin span\{w_1,...,w_{n-1}\}$.
זה אומר ש$\{w_1,...,w_{n-1},u\}$ בת"ל. (כי לקחנו קבוצה בת"ל אם היא בסיס של תת מרחב אז היא בת"ל- והוספנו וקטור שלא ב$span$).

$$\{w_1,...,w_{n-1},u\}\subseteq W+U$$

בנוסף, ממשפט השלישי חינם $\{w_1,...,w_{n-1},u\}$ היא בסיס לV כי היא בת"ל מהגודל של המימד של V.
לכן $W+U=V$.

4. יהא V מ"ו מימד 5. ויהיו W_1,W_2 תתי מרחבים עם מימד $\dim W_1=3,\dim W_2=4$.
מה האפשרויות ל $\dim W_1\cap W_2$ (מצאו דוגמה קונקרטית לכל אחת מהאפשרויות).
פתרון:

$$W_1+W_2\subseteq V$$

$$\dim(W_1+W_2)\le\dim V=5$$

$$5\ge\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$$

$$=3+4-\dim(W_1\cap W_2)$$

לכן

$$\dim(W_1\cap W_2)\ge 2$$

מכיוון ש

$$W_1\cap W_2\subseteq W_1$$

אז

$$\dim(W_1\cap W_2)\le\dim W_1=3$$

נביא דוגמאות כדי להראות שגם 2 וגם 3 אפשריים.
נקח $V=\mathbb{R}^5$
דוגמא לחיתוך ממימד 3:

$$W_2=span\left\{e_1,e_2,e_3,e_4\right\},W_1=span\left\{e_1,e_2,e_3\right\}$$

דוגמא ליתוך ממימד 2 :

$$W_2 = span\left\{e_1, e_2, e_3, e_4\right\}, W_1 = span\left\{e_1, e_2, e_5\right\}$$

יש 2 וקטורים בת"ל משותפים בחיתוך, ולכן המימד הוא לפחות 2. הוא לא יכול להיות 3 כי $W_1 \nsubseteq W_2$ (כי יש בו וקטור שלא נמצא ב$span$ של הבסיס של W_2). ואם החיתוך ממימד 3 זה יגיד ש W_1 שווה לחיתוך.

1. יהא V מ״ו. ויהיו W_1, W_2 ת״מ המקיימים כי

$$\dim\left(W_1 + W_2\right) = \dim\left(W_1 \cap W_2\right) + 1$$

הוכיחו : אחד מהם מוכל בשני.

$$\dim(W_1 + W_2) - \dim(W_1 \cap W_2) = 1$$

ידוע ש

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

עוד דברים ידועים :

$$W_1 \cap W_2 \subseteq W_1, W_2 \subseteq W_1 + W_2$$

לכן

$$\dim(W_1 \cap W_2) \leq \dim(W_1), \dim(W_2) \leq \dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1 \cap W_2) + 1$$

כזכור, מימדים הם מספרים שלמים.
אז,

$$\dim(W_1 \cap W_2) \leq \dim(W_1) \leq \dim(W_1 \cap W_2) + 1$$

ולכן יש 2 אופציות :

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1)$$

או

$$\dim(W_1) = \dim(W_1 \cap W_2) + 1 = \dim(W_1 + W_2)$$

מהמקרה הראשון, הכלה ושוויון מימדים, נקבל ש$W_1 = W_1 \cap W_2$ ולכן $W_1 \subseteq W_2$
מהמקרה השני, הכלה ושוויון מימדים $W_1 = W_1 + W_2$. זה אומר ש $W_2 \subseteq W_1$