תזכורת: בסוף השיעור הקודם דיברנו על התכנסות של סדרות:
הגדרה: נאמר ש$z_n \to z$ אם $|z_n - z| \to 0$.
הוכחנו: $z_n = x_n + iy_n, z = x + iy$ אז

$$z_n \to z$$

אמ"ם

$$x_n \to x, y_n \to y$$

תרגיל: נניח ש$z_n \to z$, ו$c \in \mathbb{C}$. הוכיחו ש$cz_n \to cz$
הוכחה: נתון ש$z_n \to z$. זה אומר ש$|z_n - z| \to 0$.
בשביל להוכיח ש$cz_n \to cz$, צריך להוכיח ש$|cz_n - cz| \to 0$.

$$|cz_n - cz| = |c||z_n - z| \to |c| \cdot 0 = 0$$

טענה: ארתמטיקה של סדרות מתקיימת. כלומר:
1. אם $z_n \to z$ ו$z'_n \to z'$, אז $z_n + z'_n \to z + z'$.
2. אם $z_n \to z$ ו$z'_n \to z'$ אז $z_n z'_n \to zz'$
3. אם $z_n \to z$ ולכל n $z_n \neq 0$, וכן $z \neq 0$, אז $\frac{1}{z_n} \to \frac{1}{z}$

פונקציות

הגדרה: פונקציה מרוכבת היא $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, כלומר הפונקציה שולחת כל מספר מרוכב לאיזשהו מספר מרוכב.
דוגמאות:
1. לכל $c \in \mathbb{C}$, אפשר להגדיר את הפונקציה הקבועה על c, כלומר, הפונקציה שמקיימת: לכל z,

$$f(z) = c$$

2. פונקציית הזהות:

$$f(z) = z$$

3. פונקציית הנורמה:

$$f(z) = |z|$$

4. פונקציית החלק הממשי:

$$f(z) = Re(z)$$

$$f(1+2i)=1$$

5. פונקציית החלק המדומה:

$$f(z)=Im(z)$$

$$f(1+2i)=2$$

6. פונקציית הצמוד:

$$f(z)=\bar{z}$$

$$f(1+2i)=1-2i$$

7. $f(z)=z^2$
8. לכל n טבעי, $f(z)=z^n$.

הערה: הפונקציה $f(z)=z^n$ לא מוגדרת כאשר n שבר שהוא לא מספר שלם. למשל, $\frac{1}{2}$ או $\frac{1}{3}$.

הסבר: $z^{\frac{1}{2}}$ זה אומר השורש של z. בממשיים יש לנו בחירה קנונית של שורשים- לוקחים תמיד את השורש החיובי. במרוכבים אין משמעות לחיובי או שלילי, אז אין לנו דרך לעשות בחירה קנונית.

$z^{\frac{1}{3}}$ זה שורש שלישי. בממשיים לכל מספר יש שורש שלישי אחד. במרוכבים לכל מספר יש 3 שורשים שלישיים. אז הפונקציה לא מוגדרת, כי לא ברור את מי מהם לקחת.

הגדרה: תהי f פונקציה מרוכבת. נאמר שf רציפה בz', אם לכל סדרה $z_n \to z'$, $f(z_n) \to f(z')$.

הגדרה: נאמר שf רציפה אם היא רציפה בכל נקודה. כלומר, לכל $z_n \to z$, מתקיים ש$f(z_n) \to f(z)$.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

(דוגמא לפונקציה שרציפה בחלק מהנקודות אבל לא בכולן)

לדוגמא: נסתכל על הפונקציה

$$f(z)=\bar{z}$$

היא רציפה.
הוכחה: צריך להוכיח שאם יש סדרה $z_n \to z$, אז $f(z_n) \to f(z)$.

$$f(z_n) = \bar{z_n}$$

$$f(z) = \bar{z}$$

כלומר, צריך להוכיח שאם $z_n \to z$ אז $\bar{z_n} \to \bar{z}$.
הוכחנו את זה בסוף השיעור הקודם.

פונקציות ממשיות בשני משתנים

אנחנו מדברים על פונקציות

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

לדוגמא:
1. $f(x,y) = x + y$
2. $f(x,y) = xy$
3. $f(x,y) = x$
4. $f(x,y) = y$
5. $f(x,y) = \dfrac{2x+2y}{3}$
6. $f(x,y) = \sin(x)e^y$

דוגמא נגדית:

$$f(x,y) = x^y$$

אינה פונקציה, כי למשל

$$f(-1, \frac{1}{2})$$

לא מוגדר.
הגדרה: נגיד שפונקציה

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

היא רציפה, אם מתקיים הדבר הבא: לכל שתי סדרות

$$x_n \to x, y_n \to y$$

$$f(x_n, y_n) \to f(x,y)$$

דוגמאות:

1. $f(x,y)=x+y$

בשביל להוכיח שהפוקנציה רציפה, צריך להראות שאם $x_n \to x$ ו$y_n \to y$ אז $f(x_n,y_n) \to f(x,y)$

במקרה שלנו, $f(x_n,y_n)=x_n+y_n$. $f(x,y)=x+y$.

אז בעצם צריך להוכיח שאם $x_n \to x$ ו$y_n \to y$ אז $x_n+y_n \to x+y$.

וזה ידוע מארתמטיקה של גבולות (זה סדרות ממשיות).

2. $f(x,y)=xy$

נוכיח שהיא רציפה: נניח ש$x_n \to x$ ו$y_n \to y$.

מארתמטיקה של גבולות, אנחנו יודעים שמתקיים: $x_ny_n \to xy$

$$x_ny_n=f(x_n,y_n)$$

$$xy=f(x,y)$$

לכן קיבלנו:

$$f(x_n,y_n) \to f(x,y)$$

וזה אומר שהפונקציה רציפה לפי ההגדרה.

3.

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y=0 \end{cases}$$

נוכיח שהפונקציה לא רציפה.

למשל $\frac{1}{n} \to 0, \frac{1}{n} \to 0$

אם הפונקציה הייתה רציפה, אז היה צריך להתקיים:

$$f(\frac{1}{n},\frac{1}{n}) \to f(0,0)$$

$$f(\frac{1}{n},\frac{1}{n})=1$$

$$f(0,0)=0$$

ולא מתקיים ש $1 \to 0$

שאלה: אם נגדיר

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x}{y} & y \neq 0 \\ 1 & y=0 \end{cases}$$

האם עכשיו הפוקנציה כן תהיה רציפה?
תשובה: עדיין לא.
הסבר: נסתכל על 0 $\frac{1}{n} \to 0, \frac{2}{n} \to$
אם היא הייתה רציפה היה צריך להתקיים ש:

$$f(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \to f(0,0)$$

$$f(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) = \frac{1}{2}$$

$$f(0,0) = 1$$

ולא מתקיים $\frac{1}{2} \to 1$
לכן הפונקציה לא רציפה.

הקשר בין פונקציות בשני משתנים, לפונקציות מרוכבות

תהי $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
כלומר, לכל מספר מהצורה $x + iy$,

$$f(x+iy) = a + bi$$

למעשה, אפשר להגדיר 2 פונקציות ממשיות בשני משתנים:

$$U(x,y) = a = Re(f(x+iy))$$

$$V(x,y) = b = Im(f(x+iy))$$

לדוגמא:
1. $f(z) = z$.
כלומר, $f(x+iy) = x + iy$

$$U(x,y) = x$$

$$V(x,y) = y$$

2. $f(z)=\bar{z}$
$f(x+iy)=x-iy$

$$U(x,y)=x$$

$$V(x,y)=-y$$

3. $f(z)=|z|$
$f(x+iy)=\sqrt{x^2+y^2}$

$$U(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$V(x,y)=0$$

4. $f(z)=z^2$.
$f(x+iy)=x^2+2xiy-y^2$

$$U(x,y)=x^2-y^2$$

$$V(x,y)=2xy$$

5. $f(z)=(1+i)z$
$f(x+iy)=(1+i)(x+iy)=x+iy+ix-y$

$$U(x,y)=x-y$$

$$V(x,y)=x+y$$

לסיכום: ראינו שכל פונקציה מרוכבת, אפשר לכתוב בצורה הבאה:

$$f(x+iy)=U(x,y)+iV(x,y)$$

גם הכיוון השני נכון. כלומר, מכל שתי פונקיות בשני משתנים, ניתן לייצר פונקציה מרוכבת. למשל,

$$U(x,y)=\frac{2x+2y}{3}$$

$$V(x,y)=\cos(x)e^y$$

אז אפשר להגדיר $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ באופן הבא:

$$f(x+iy) = \frac{2x+2y}{3} + (\cos(x)e^{y})\, i$$

לדוגמא:

$$f(i) = \frac{2}{3} + ei$$

טענה: אם

$$f = U + iV$$

אז f רציפה אמ"ם U וV רציפות.
הוכחה: f רציפה אמ"ם מתקיים התנאי הבא:
לכל $z_n \to z$, מתקיים: $f(z_n) \to f(z)$.

$$z_n = x_n + iy_n, z = x + iy$$

$$f(z_n) = f(x_n + iy_n) = U(x_n, y_n) + iV(x_n, y_n)$$

$$f(z) = f(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y)$$

$z_n \to z$ שקול: $x_n \to x, y_n \to y$
$f(z_n) \to f(z)$ שקול: $U(x_n, y_n) \to U(x,y) \wedge V(x_n, y_n) \to V(x,y)$
לכן קיבלנו ש f שומרת על התכנסות, שקול לכך שU וV שומרות על התכנסות.
כלומר, f רציפה שקול לכך שU וV רציפות.
ביתר פירוט:
נניח שU וV רציפות, ואנחנו רוצים להוכיח שf רציפה.
תהי $z_n \to z$, ורוצים להוכיח ש$f(z_n) \to f(z)$.
$z_n \to z$, זה אומר ש$x_n \to x, y_n \to y$. בגלל שU וV רציפות, אז

$$U(x_n, y_n) \to U(x,y), V(x_n, y_n) \to V(x,y)$$

וזה גורר ש

$$f(z_n) = U(x_n, y_n) + iV(x_n, y_n) \to U(x,y) + iV(x,y) = f(z)$$

כיוון שני: נניח שאנחנו יודעים שf רציפה, ונוכיח שU וV רציפות.
בשביל להוכיח שU וV רציפות, צריך להראות שאם $x_n \to x, y_n \to y$ אז $U(x_n, y_n) \to U(x,y)$ ו$V(x_n, y_n) \to V(x,y)$ (זאת ההגדרה של פונקציה רציפה בשני משתנים)

נסתכל על הסדרה המרוכבת $z_n = x_n + iy_n$. בגלל ש$x_n \to x$ ו$y_n \to y$ אז $x_n + iy_n \to x+iy$ (לפי הטענה מסוף השיעור בשבוע שעבר, על כך שסדר מרוכבת שואפת למספר מרוכב, אמ"ם, הממשי שואף לממשי והמדומה שואף למדומה).
בגלל שf רציפה, $f(x_n + iy_n) \to f(x+iy)$ (מהגדרת רציפות).

$$f(x_n + iy_n) = U(x_n, y_n) + iV(x_n, y_n)$$

$$f(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y)$$

ידוע שכאשר סדרה מרוכבת מתכנסת למספר מרוכב, אז החלק הממשי שואף לממשי, והמדומה שואף למדומה.
כלומר, במקרה שלנו :

$$U(x_n, y_n) \to U(x,y)$$

$$V(x_n, y_n) \to V(x,y)$$