<u>תרגיל מספר 8 במבנים אלגבריים</u>

- תאריכי הגשה: הקבוצה של יום שלישי – 28/12. יום רביעי – 29/12. יום חמישי – 30/12
- נא לכתוב על התרגילים שם, ת.ז. ומספר קבוצת תרגול.
- ההגשה היא רק לקבוצות שאתם רשומים אליהן! תרגילים שיוגשו לקבוצות אחרות לא יבדקו.

שימו לב: שאלות 4 ו- 6 הן חובה, מיתר השאלות בחרו 5 שאלות כרצונכם.

<u>שאלה 1:</u>

הוכיחו את הטענה הבאה : תהיינה $H, K < G$ סופיות אזי מתקיים ש $|HK| = \frac{|H||K|}{|H\cap K|}$ (רמז: הגדירו העתקה $H \times K \to HK$ ע"י $(h,k) \mapsto hk$. עבור $h \in H, k \in K$ ו- $a \in H \cap K$ רשמו $hk = (ha)(a^{-1}k)$ וכך מצאו התאמה בין מספר המקורות לכל איבר בתמונה לבין מספר האיברים ב $H \cap K$.

<u>שאלה 2:</u>

<u>תזכורת</u>: תהיינה $H, K < G$. G היא מכפלה ישרה פנימית של H ו- K אם H ו- K תת חבורות נורמליות של G, G=HK ו- $H \cap K = \{1\}$. תהי G חבורה קומוטטיבית ונניח כי G/H היא ציקלית אינסופית, הוכיחו כי קיימת $K < G$ כך ש G היא מכפלה ישרה פנימית של H ו- K.

<u>שאלה 3:</u>

תהי $G = H \times K$ באשר H ציקלית מסדר p^2 ו- K ציקלית מסדר p^3 (p ראשוני).

מצאו כמה איברים ב G הם מסדר p^2 וכמה תת חבורות של G הן מסדר p^2.

<u>שאלה 4:</u>

תהי G חבורה מסדר p^n (p ראשוני) , הוכיחו כי קיימות תת-חבורות $G_1, \dots, G_{n-1} < G$ המקיימות:

א. $|G_i| = p^i$ ב. $G_i < G_{i+1}$ ג. G_i נורמלית ב G.

<u>שאלה 5 :</u>

עבור $H \le G$ נגדיר: $N(H) := \{g \in G : \quad gH = Hg\}$ (המנרמל של H ב- G)

הוכיחו:

א. $N(H) \le G$ וכן ש $H \lhd G \Leftrightarrow N(H) = G$.

ב. $H \lhd N(H)$.

ג. אם $H \lhd K \le G$ אזי $K \le N(H)$.

ד. נסתכל על S_6 ועל הקבוצה הבאה: $H = \{\sigma \in S_6 : \sigma(2) = 2, \sigma(4) = 4, \sigma(6) = 6\}$.

(1) הוכיחו ש- H היא תת-חבורה ושהיא איזומורפית ל- S_3. האם היא נורמלית?

(2) הוכיחו שב- N(H) (המנרמל של H) יש שתי תת-חבורות – K,L כך ששתיהן איזומורפיות ל- S_3 ו- $L \cap K = \{Id\}$.

שאלה 6:

תזכורת: בהרצאה הוכחתם את המשפט הבא: תהי G חבורה מסדר p^k, כש- p ראשוני ו- k>1 מספר טבעי. אזי המרכז של G אינו טריוויאלי.

תהי G החבורה הבאה $G = \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a,b,c \in Z_5 \right\}, \cdot \right)$.

ראיתם בהרצאה, שכל חבורה לא קומוטטיבית מסדר p^3 היא מאחת הצורות הבאות:

(א) $\langle\, x, y, z: \quad z^p = 1, z \in Z(G), z = [y,x], y^p = 1, x^p = z \,\rangle$

(ב) $\langle\, x, y, z: \quad z^p = 1, z \in Z(G), z = [y,x], y^p = 1, x^p = 1 \,\rangle$

קבעו את סוג החבורה שלעיל ע"י מציאת יוצרים של G המקיימים את כל היחסים המפורטים. (כמובן, הוכיחו מפורשות שהיוצרים שבחרתם אכן יוצרים את החבורה).

שאלה 7:

מצאו 2 תת חבורות H,K כך ש- H ת"ח נורמלית ב-D_4, K ת"ח נורמלית ב-H אך K איננה ת"ח נורמלית של D_4.

שאלה 8:

תהי N תת חבורה נורמלית של חבורה G. הוכיחו שגם Z(N) היא תת חבורה נורמלית של G.(שאלה ממבחן).

שאלה 9:

הפריכו או הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם A,B שתי ת"ח נורמליות של G כך ש- G/A איזומורפי ל-B, אז G/B איזומורפי ל-A.

ב. תהי H ת"ח של חבורה G. אם $x \in N(H)$ אז הסדר של x מחלק את הסדר של H.

ג. לכל G חבורה, H תת חבורה שלה מתקיים: Z(H) היא תת חבורה של Z(G).

ד. אם G חבורה מסדר n אז לא קיים m<n כך ש-G איזומורפית לתת-חבורה של S_m.

ה. A_4 איזומורפית ל- D_6.