מד"ר ־ תרגול 11

11 בינואר 2014

0.1 בעיות שפה של שטרום ליוביל

נתבונן במשוואה

$$L(y) := P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0, \quad x \in [a,b]$$

מתקיים:

$$L(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L(y_1) + \beta L(y_2)$$

בואו נתבונן במשוואה הבאה:

$$L(y) := -\lambda \rho(x) y$$

כאשר λ הוא פרמטר ממשי או מרוכב, $x \in [a,b]$, $\rho(x)$ פונקציה רציפה ואי שלילית בקטע זה.

0.1.1 סוגי תנאי שפה

1. $\begin{array}{c} \alpha_0 y(\alpha) + a_1 y'(0) = 0 \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0 \end{array}$ כאשר $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$ ו־ $|\alpha_0| + |\alpha_1| > 0, |\beta_0| + |\beta_1| > 0$. תנאי שפה זה נקרא <u>תנאי שפה רגולרי.</u>
2. $y(a), y'(a)$ חסומות ב־a ו $\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0$ כאשר $\beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$ ו־ $|\beta_0| + |\beta_1| > 0$. תנאי שפה זה נקרא תנאי שפה חד צדדי שמאלי.
3. $\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y\prime(a) = 0$, $y(b), y'(b)$ חסומות ב־b כאשר $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ ו־ $|\alpha_1| + |\alpha_0| > 0$. תנאי זה נקרא תנאי שפה חד צדדי ימני.
4. $y(a), y'(a)$ חסומות ב־a, $y(b), y'(b)$ חסומות ב־b. תנאי שפה דו צדדי.
5. $\begin{array}{c} y(a) = y(b) \\ y'(a) = y'(b) \end{array}$ תנאי שפה מחזורי.

דוגמה 1:

1. מצא את כל הערכים של הפרמטר λ שעבורם בעיית השפה

$$\begin{aligned} y'' &= -\lambda y \\ y(0) &= 0 \\ y(1) &= 0 \end{aligned}$$

בעלת פתרון לא טריוויאלי.

2. מצא פתרונות של הבעיה הזאת עבור כל הערכים של הפרמטר λ מסע' א'.

פתרון:

1. $L(y) = y'', \rho(x) = 1$.

שלב 1: מציאת פתרון כללי של המשוואה $y'' = -\lambda y$. מתקיים:

$$\begin{aligned} y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \quad \lambda \neq 0 \\ y(x) = c_1 + c_2 x \quad \lambda = 0 \end{aligned}$$

שלב 2: מציאת הקבועים c_1, c_2:

$\lambda \neq 0$: הצבת תנאי השפה נותנת:

$$\begin{aligned} (\star) \qquad y(0) &= c_1 + c_2 = 0 \\ y(1) &= c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0 \end{aligned}$$

מענין אותנו לחפש ערכים של λ שעבורם המערכת $(\star)$ בעלת פתרון לא טריוויאלי. המערכת $(\star)$ בעלת אינסוף פתרונות א"סם הדטרמיננטה $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\sqrt{-\lambda}} & e^{-\sqrt{-\lambda}} \end{vmatrix}$ של המערכת $(\star)$ שווה לאפס. כלומר , מתקיים :

$$e^{\sqrt{-\lambda}} = e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0$$

המשוואה הנ"ל נקראת משוואה אופיינית של בעיית השפה המקורית ופתרונות של המשוואה נקראים ערכים עצמיים של בעיית השפה המקורית.

$$\begin{aligned} e^{-\sqrt{-\lambda}} - e^{\sqrt{-\lambda}} &= 0 \Leftrightarrow \frac{1 - e^{2\sqrt{-\lambda}}}{e^{\sqrt{-\lambda}}} = 0 \Leftrightarrow 1 - e^{2\sqrt{-\lambda}} = 0 \\ 2\sqrt{-\lambda} &= 2k\pi i \Leftrightarrow \sqrt{-\lambda} = k\pi i \Leftrightarrow \lambda_k = k^2\pi^2 \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned}$$

אז קיבלנו $\lambda_k = k^2\pi^2$ ערכים עצמיים.

$\lambda = 0$: הצבת תנאי שפה נותנת

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 = 0 \\ y(1) &= c_1 + c_2 = 0 \end{aligned}$$

פתרון טריוויאלי. כלומר $\lambda = 0$ לא ע"ע.

2. הפתרון הכללי של המשוואה $y'' = -k^2\pi^2 y$ מתקבל ע"י $y(x) = c_1\cos(k\pi x) + c_2\sin(k\pi x)$. נציב תנאי שפה:

$$y_0 = c_1 = 0$$

לכן לכל $c_2 \in \mathbb{R}$, $y(x) = c_2\sin(k\pi x)$ ואכן מתקיים $y_1 = c_2\sin(k\pi) = 0$. הפונקציות $\forall c_2 \in \mathbb{R} \quad y_k(x) = c_2\sin(k\pi x)$ נקראות הפונקציות העצמיות של בעיית השפה המקורית, המתאימות לערך העצמי

$$\lambda_k = k^2\pi^2, \quad k = \pm1, \pm2, \ldots$$

דוגמה 2:

$$\begin{aligned} y'' + y' &= -\lambda y \\ y(0) = y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

פתרון: נמצא פתרון כללי למשוואה:

$\lambda \neq 0$:

$$\begin{aligned} r^2 + r + \lambda &= 0 \\ r_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\lambda}}{2} \\ y(x) &= e^{\frac{-1+\sqrt{1-4\lambda}}{2}x} + c_2 e^{\frac{-1-\sqrt{1-4\lambda}}{2}x} \end{aligned}$$

$\lambda = 0$:

$$\begin{aligned} r^2 + r &= 0 \\ r_{1,2} &= 0, -1 \\ y(x) &= c_1 + c_2 e^{-x} \end{aligned}$$

נמצא את הקבועים c_1, c_2:

$\lambda \neq 0$:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 0 \\ y'(0) &= \frac{-1+\sqrt{1-4\lambda}}{2}c_1 + \frac{-1-\sqrt{1-4\lambda}}{2}c_2 = 0 \end{aligned}$$

נמצא מתי למשוואה יש אינסוף פתרונות:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{1-4\lambda}}{2} & \frac{-1-\sqrt{1-4\lambda}}{2} \end{vmatrix} = -\sqrt{1-4\lambda} = 0$$

ולכן $\lambda = \frac{1}{4}$ ע"ע.
עבור $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 0 \\ y'(0) &= c_1 - c_2 = 0 \end{aligned}$$

פתרון טריוויאלי.
נמצא את הפונקציה העצמית המתאימה:

$$\begin{aligned} y'' + y' + \frac{1}{4}y &= 0 \\ r^2 + r + 0.25 &= 0 \\ (r + \frac{1}{2})^2 &= 0 \\ r &= -\frac{1}{2} \\ y(x) &= (c_1 + c_2 x)e^{-\frac{1}{2}x} \end{aligned}$$

נציב את תנאי השפה ונבדוק את התנאי השני:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 = 0 \\ y'(0) &= c_2 e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2} c_2 x e^{-0.5x} \end{aligned}$$

מסקנה:רק תנאי השפה שהגדרנו בתחילת השיעור יבטיחו קיום של פתרונות לא טריוויאלים.

דוגמה 3:

$$\begin{aligned} y\prime\prime &= -\lambda y \\ y'(0) &= y'(\pi) = 0 \end{aligned}$$

פתרון: נמצא פתרון כללי למשוואה:
$\lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned} r^2 + \lambda &= 0 \\ r &= \pm\sqrt{-\lambda} \\ y(x) &= c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \end{aligned}$$

$\lambda = 0$:

$$y(x) = c_1 + c_2 x$$

נמצא את הקבועים $c_{1,2}$:
$\lambda \neq 0$:

$$\begin{aligned} y\prime(0) &= \sqrt{-\lambda}c_1 - \sqrt{-\lambda}c_2 = 0 \\ y'(\pi) &= \sqrt{-\lambda}c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}\sqrt{-\lambda} = 0 \end{aligned}$$

נמצא מתי למערכת יש אינסוף פתרונות:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\pi} & -e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} \end{vmatrix} &= 0 \\
\Rightarrow -e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} + e^{\sqrt{-\lambda}\pi} &= 0 \\
e^{2\sqrt{-\lambda}\pi} - 1 &= 0 \\
2\sqrt{-\lambda}\pi &= 2\pi k i \\
\Rightarrow \lambda_k = k^2, & \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots
\end{aligned}$$

נמצא את הפונקציות העצמיות המתאימות:

$$\begin{aligned}
y'' + k^2 y &= 0 \\
r^2 + k^2 &= 0 \\
r &= \pm k i \\
y(x) &= c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx)
\end{aligned}$$

נציב תנאי שפה:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= -kc_1 \sin(kx) + kc_2 \cos(kx) \\
y'(0) &= kc_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \\
y'(\pi) &= -kc_1 \sin(\pi k) = 0
\end{aligned}$$

לכן הפונקציות העצמיות המתאימות ל־λ_k הן:

$$y_k(x) = c_1 \cos(kx)$$

$\lambda = 0$:

$$\begin{aligned}
y'(0) &= c_2 = 0 \\
y'(\pi) &= c_2 = 0
\end{aligned}$$

לכן, $y(x) = c_1$ פתרון לא טריוויאלי עבור $\lambda = 0$.
בסה"כ נקבל: $y_k(x) = c_1 \cos(kx)$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. פונקציות עצמיות המתאימות לערכים עצמיים $\lambda_k = k^2$.