לינארית 2 - תרגול 5

נשים לב! אם נתונה המטריצה $[T]_W^E$ אזי ניתן להשתמש במטריצות מעבר כדי למצוא את הייצוג של T לפי בסיסים אחרים. לדוג'

$$[T]_{B_1}^{B_1} = [I]_{B_2}^{W}[T]_W^E[I]_E^{B_1}$$

דוגמא: תהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $[T]_E^E=\begin{pmatrix}1&2\\-7&11\end{pmatrix}$ כאשר E הוא הבסיס הסטנדרטי.

$B_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right\}$, מצא $[T]_{B_2}^{B_1}$

$B_2=\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\right\}$

פתרון

$$[T]_{B_2}^{B_1} = \underset{?}{[I]_{B_2}^E}\ \underbrace{[T]_E^E}_{\text{נתון}}\ \underset{?}{[I]_E^{B_1}}$$

נמצא $[I]_E^{B_1}$:

$$[I]_E^{B_1}=\left(\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_E\ \left[\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right]_E\right)=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}$$

נמצא $[I]_{B_2}^E$:

$$[I]_{B_2}^E=\left([I]_E^{B_2}\right)^{-1}=\left(\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}_E\ \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}_E\right)^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2\\0&4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&\frac12\\1&\frac14\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}-1&2&1&0\\0&4&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[-R_1]{\frac14R_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&-2&-1&0\\0&1&0&\frac14\end{array}\right)\xrightarrow{R_1+2R_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-1&\frac12\\0&1&1&\frac14\end{array}\right)$$

ולכן סה"כ:

$$[T]_{B_2}^{B_1}=\begin{pmatrix}-1&\frac12\\1&\frac14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-7&11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}=\ldots=\begin{pmatrix}-1&-3\frac12\\1&-\frac{11}{4}\end{pmatrix}$$

תרגיל: תהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ העתקת השיקוף לפי ציר ה-X צ"א $T(x,y)=(x,-y)$

מצא בסיס B המקיים $[T]_B=\begin{pmatrix}-1&2\\0&1\end{pmatrix}$

פתרון: נמצא תחילה ייצוג של T עפ"י הבסיס הסטנדרטי

$$[T]_E^E=\left(\left[T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]_E\ \left[T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]_E\right)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

(2)

$$\underbrace{[T]^B_B}_{\text{נתון}} = \underbrace{[I]^E_B}_{P\ \text{נסמן}} [T]^E_E \underbrace{[I]^B_E}_{P^{-1}}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P$$

P היא מטריצת מעבר בין שני בסיס של R^2 הינה מגודל $2x2$

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{נסמן}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -a+2c & -b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a+2c = a \\ -b+2d = -b \\ c = c \\ d = -d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a+2c = 0 \\ 2d = 0 \\ 0 = 0 \\ 2d = 0 \end{cases}$$

2 משוואות ב- 4 נעלמים

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & \\ \boxed{-2} & 0 & 2 & 0 & | \ 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & | \ 0 \end{array}$$

כבר מדורגת

משתנים חופשיים b,c.

$d=0$

$-2a = -2c \Rightarrow a = c$

סה״כ כל פיתרון מהצורה $(c,b,c,0)$

נבחר פיתרון כלשהו $b=c=1$

$$[I]^E_B = P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \_\_\_\_ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

צ״ל

$$[I]^B_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left([v_1]_E \ [v_2]_E \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

נסמן $B = \{v_1, v_2\}$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \Leftarrow$$

מציאת גרעין ותמונה בעזרת מטריצה מייצגת

אלגוריתם: 1. מצא מטריצה מייצגת $A = [T]_F^E$

2. מצא את מרחבי הקואורדינטות של הגרעין והתמונה

$$C(A) = [\mathrm{Im}\,T]_F \qquad N(A) = [\ker T]_E$$

3. העבר חזרה את מרחבי הקואורדינטות לצורה המקורית

תרגיל: תהי $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ העתקה המוגדרת ע"י $T(x,y,z) = (x+y,\ y+z,\ 2x-2z)$

מצא בסיס לגרעין ולתמונה של T

פתרון: נמצא מטריצה מייצגת לפי הבסיס הסטנדרטי

$$A = [T]_S^S = \left(\left[T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]_S \ \left[T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]_S \ \left[T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]_S \right) = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\2&0&-2\end{pmatrix}$$

$\mathrm{Im}\,T$:

$$[\mathrm{Im}\,T]_S = C(A) = sp\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix} \right\}$$

כיוון שאנחנו ב-$\mathbb{R}^3$ ולפי הבסיס הסטנדרטי אז

$$\mathrm{Im}\,T = sp\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix} \right\}$$

$\ker T$:

$$[\ker T]_S = N(A) \underset{\text{I}}{=} sp\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&1&0\\2&0&-2&0\end{array}\right) \xrightarrow{R_3-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&-2&-2&0\end{array}\right) \xrightarrow{R_3+2R_2} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc}x&y&z\end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&1&0&0\\0&\boxed{1}&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\end{array}$$

$$(t, -t, t) \Leftarrow \begin{matrix} z = t \\ y = -t \\ x = t \end{matrix}$$

ושוב כיוון שאנחנו ב- $\mathbb{R}^3$ ולפי הבסיס הסטנדרטי אז

$$\ker T = sp\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

(4)

המשך

סה"כ מצאנו

$$ImT = sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

$$kerT = sp\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

נמצא להם בסיס:

עבור ImT: נוריד את הוקטורים התלו"ל מהקב' הפורשת

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&0\\0&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-2\\0&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-R_1}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן בסיס ל- ImT הוא $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

עבור $kerT$: ברור ש- $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ בת"ל ולכן זה הבסיס ל- $kerT$.

תרגיל: תהי $T: \mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י

$$A = [T]^E_S = \begin{pmatrix}2&0&2\\2&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

כאשר $E = \{1+x,\ x,\ 2+x^2\}$ בסיס ל- $\mathbb{R}_2[x]$

$S = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ הבסיס הסטנדרטי ל- $\mathbb{R}^3$.

מצא ImT, $kerT$ ובסיס אליהם

פתרון: (*)

$$[ImT]_S = C(A) = sp\left\{\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

וכיוון שאנחנו ב- $\mathbb{R}^3$ לפי הבסיס הסטנדרטי אז

$$ImT = sp\left\{\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$[kerT]_E = N(A) = \left\{\begin{pmatrix}-t\\t/2\\t\end{pmatrix}\right\} = sp\left\{\begin{pmatrix}-1\\1/2\\1\end{pmatrix}\right\}$$ (*)

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&0&2&0\\2&2&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}2&0&2&0\\0&2&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$z=t$
$y=\frac{t}{2}$
$x=-t$

כיוון שעכשיו אנו לפי בסיס E ולא לפי הבסיס הסטנדרטי אז נרצה להעביר לוקטורים ב- $\mathbb{R}_2[x]$

ראה הערה על מעבר זה בסוף העמוד

$$\begin{pmatrix}-1\\1/2\\1\end{pmatrix} = \left[-1(1+x) + \tfrac{1}{2}\cdot x + 1\cdot(2+x^2)\right]_E$$

ז"א:

$$[\ker T]_E = sp\left\{ [-1 + x + \tfrac{1}{2}x + 2 + x^2]_E \right\}$$

$$\Rightarrow \ker T = sp\left\{ x^2 - \tfrac{1}{2}x + 1 \right\}$$

יש פה רק פולינום אחד $\neq 0$ ולכן זו קבוצה בת"ל ולכן בסיס ל- $\ker T$

<u>בסיס ל- $\mathrm{Im}T$</u>: ראינו

$$\mathrm{Im}T = sp\left\{ \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$$

נבדוק מי מהם תלוי

$$\begin{pmatrix}2&2&0\\0&2&0\\2&1&0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_1} \begin{pmatrix}2&2&0\\0&2&0\\0&-1&0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix}2&2&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

⇐ בסיס ל- $\mathrm{Im}T$ הוא $\left\{ \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} \right\}$

<u>הערה:</u> (לגבי עמוד 4) בעצם כאשר מצאנו ש-

$$[\ker T]_E = sp\left\{ \begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix} \right\}$$

(ועכשיו אנחנו רוצים למצוא $\ker T$ בלי) אז בעצם צריך להבין שכיוון שמצאנו $[\ker T]_E$ אז $\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$ הוא בעצם איזשהו ווקטור v לפי בסיס E

ז"א $\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix} = [v]_E$ ואנו רוצים למצוא את v!!

כיוון ש- E בסיס אז v צ"ל של איבריו:

$$v = \alpha(1+x) + \beta x + \gamma(2+x^2)$$

ונתון לנו ש- $[v]_E = \begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$ ז"א $\alpha=-1, \beta=\frac{1}{2}, \gamma=1$

ולכן

$$v = -1(1+x) + \tfrac{1}{2}x + 1(2+x^2) = x^2 - \tfrac{1}{2}x + 1$$