פתרון תרגיל 8 - לינארית

1) תהא המכפלה הפנימית עבור $\mathbb{C}^3$ המוגדרת באופן הבא:
$\left\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\right\rangle = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + x_3\overline{y}_3$.

חשב את המכפלה הפנימית של $\begin{pmatrix}1\\2\\1+i\end{pmatrix}$ עם:

א. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

ב. $\begin{pmatrix}i\\2i\\3i\end{pmatrix}$.

ג. $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$.

ד. $\begin{pmatrix}1-i\\2\\1-i\end{pmatrix}$.

<u>פתרון:</u>

א) $\left\langle (1,2,1+i),(1,2,3)\right\rangle = 1\cdot\overline{1}+2\cdot\overline{2}+(1+i)\cdot\overline{3} = 8+3i$.

ב) $\left\langle (1,2,1+i),(i,2i,3i)\right\rangle = 1\cdot\overline{i}+2\cdot\overline{2i}+(1+i)\cdot\overline{3i} = 3-8i$.

ג) $\left\langle (1,2,1+i),(3,2,1)\right\rangle = 1\cdot\overline{3}+2\cdot\overline{2}+(1+i)\cdot\overline{1} = 8+i$.

ד) $\left\langle (1,2,1+i),(1-i,2,1-i)\right\rangle = 1\cdot\overline{(1-i)}+2\cdot\overline{2}+(1+i)\cdot\overline{(1-i)} = 5+3i$.

2) הוכיחו את ההכללה לתכונה "כמעט לינאריות ברכיב השני":
$\left\langle \sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{m}\beta_j w_j\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\overline{\beta}_j\left\langle v_i,w_j\right\rangle$.

<u>הוכחה:</u>

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{m}\beta_j w_j\right\rangle \overset{1}{=} \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left\langle v_i, \sum_{j=1}^{m}\beta_j w_j\right\rangle \overset{2}{=} \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{\left\langle \sum_{j=1}^{m}\beta_j w_j, v_i\right\rangle} \overset{3}{=} \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{\sum_{j=1}^{m}\beta_j\left\langle w_j,v_i\right\rangle}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\overline{\beta_j}\overline{\left\langle w_j,v_i\right\rangle} \overset{4}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\overline{\beta_j}\left\langle v_i,w_j\right\rangle$$

1-לינאריות ברכיב הראשון.
2-הרמטיות.
3-לינאריות ברכיב השני.
4-הרמטיות.

3) יהי $V=\mathbb{R}^n$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ופונקציה $\|\cdot\|_2:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י:
$\|(x_1,x_2,\dots,x_n)\|_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$. הוכח שהפונקציה הנ"ל נורמה.

הוכחה:

1) $\|(x_1,x_2,\dots,x_n)\|_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\ge 0$ מאחר ושורש הוא חיובי. אם $\|(x_1,x_2,\dots,x_n)\|_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}=0$ אז נקבל $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=0$ ומאחר ומדובר בסכום של ריבועים השווה לאפס מעל $\mathbb{R}$ נקבל $x_1=x_2=\cdots=x_n$ ולכן הווקטור שווה ל-0.

2)

$$\|\alpha(x_1,x_2,\dots,x_n)\|_2=\|(\alpha x_1,\alpha x_2,\dots,\alpha x_n)\|_2=\sqrt{\alpha^2x_1^2+\alpha^2x_2^2+\cdots+\alpha^2x_n^2}=\sqrt{\alpha^2\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)}=$$
$$=|\alpha|\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}=|\alpha|\|(x_1,x_2,\dots,x_n)\|_2$$

3)

$$\|x+y\|_2=\|(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n)\|_2=\|(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)\|_2=$$
$$=\sqrt{(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2+\cdots+(x_n+y_n)^2}=$$
$$=\sqrt{\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)+\left(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2\right)+2\left(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n\right)}=$$
$$=\sqrt{\|x\|_2^2+\|y\|_2^2+2\left(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n\right)}\overset{1}{\le}\sqrt{\|x\|_2^2+\|y\|_2^2+2\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}}=$$
$$=\sqrt{\|x\|_2^2+\|y\|_2^2+2\|x\|_2^2\cdot\|y\|_2^2}=\sqrt{\left(\|x\|_2+\|y\|_2\right)^2}=\|x\|_2+\|y\|_2$$

1- נשים לב שנוכל להשתמש באי שוויון קושי שוורץ בגרסה ללא שימוש בנורמה המושרית.
הוכחנו את שלושת האקסיומות של נורמה ולכן הפונקציה הנ"ל היא אכן נורמה.

4) בהינתן V ממ"פ אזי נגדיר את ה"נורמה המושרת מהמכפלה הפנימית" באופן הבא:
לכל $v\in V$ $\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$. הוכיחו כי הנורמה המושרת אכן נורמה.

הוכחה:

1) $\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}\ge 0$ מאחר ושורש הוא חיובי. אם $\sqrt{\langle v,v\rangle}=0$ אזי $\langle v,v\rangle=0$ ולכן $v=0$.

2) $\|\alpha v\|=\sqrt{\langle \alpha v,\alpha v\rangle}=\sqrt{\alpha\langle v,\alpha v\rangle}=\sqrt{\alpha\bar{\alpha}\langle v,v\rangle}=\sqrt{|\alpha|^2\langle v,v\rangle}=|\alpha|\sqrt{\langle v,v\rangle}=|\alpha|\|v\|$.

3)

$$\|u+v\|^2=\langle u+v,u+v\rangle=\langle u,u+v\rangle+\langle v,u+v\rangle=\overline{\langle u+v,u\rangle}+\overline{\langle u+v,v\rangle}=\overline{\langle u,u\rangle}+\overline{\langle v,u\rangle}+\overline{\langle u,v\rangle}+\overline{\langle v,v\rangle}=$$
$$=\|u\|^2+\|v\|^2+\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle\le\|u\|^2+\|v\|^2+\|u\|\|v\|+\|v\|\|u\|=\left(\|u\|+\|v\|\right)^2$$

לכן, קיבלנו את אי שוויון המשולש.
הוכחנו את שלושת האקסיומות של נורמה ולכן הנורמה המושרית אכן נורמה.

5) התת מרחב הניצב ל S מוגדר להיות $S^\perp:=\left\{v\in V\,\middle|\,\forall u\in S:\langle u,v\rangle=0\right\}$.

הוכח:

א. $S^\perp$ הינו תת מרחב.

ב. $S^\perp=\left[Span(S)\right]^\perp$.

הוכחה:

א) נוכיח עפ"י הקריטריון המקוצר:

1. יהי $v=\vec{0}$. נשים לב שלכל $u\in S$ מתקיים $\langle\vec{0},u\rangle=0$ ולכן $\vec{0}\in S$.

2. יהיו $v_1,v_2\in S^{\perp}$ ו $\alpha\in\mathbb{F}$ סקלר. נשים לב שמתקיים:

$$\langle v_1+\alpha v_2,u\rangle=\langle v_1,u\rangle+\alpha\langle v_2,u\rangle=0+\alpha\cdot 0=0$$

ולכן $v_1+\alpha v_2\in S^{\perp}$.

בסה"כ הוכחנו ש $S^{\perp}$ תת מרחב.

ב) נכתוב $S=\{u_1,u_2,\ldots,u_m\}$ נוכיח באמצעות הכלה דו כיוונית:

$\subseteq$: יהי $v\in S^{\perp}$. ע"פ הנתון לכל i מתקיים $\langle u_i,v\rangle=0$. לכן, לכל וקטור $w\in Span(S)$ עבורו $w=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i$ שניקח נקבל:

$$\langle w,v\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i,v\right\rangle=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\langle u_i,v\rangle=0$$

ולכן $v\in\left[Span(S)\right]^{\perp}$.

$\supseteq$: יהי $v\in\left[Span(S)\right]^{\perp}$. ע"פ הנתון לכל $\alpha_i\in\mathbb{F}$ מתקיים $\left\langle\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i,v\right\rangle=0$. לכן נקבל $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\langle u_i,v\rangle=0$. נשים לב שאיברי S נמצאים גם ב-$Span(S)$ ולכן לכל i מתקיים $\langle u_i,v\rangle=0$. כלומר, $v\in S^{\perp}$.