# חבורת המנה ומשפטי איזומורפיזם

## משפט/הגדרה

תהי $G \triangleleft H$ ($\forall_{g\in G} gH = Hg$). תהי ${}^{G}/_{H}$ קבוצת המחלקות של $H$ ב$G$. נגדיר פעולת חבורה של ${}^{G}/_{H}$

$$(aH) * (bH) := aHbH = abH$$

איבר היחידה שלנו הוא $H$ כי $aH * H = aH$. איבר הופכי של $aH$ הוא $a^{-1}H$

$$aH * a^{-1}H = a^{-1}H * aH = a^{-1}aH = H$$

### הערה

כשהגדרנו את הכפל $(aH) * (bH) = abH$ יש לוודא שהכפל מוגדר היטב. יש הרבה "שמות" לאיבר $aH$(כלומר נגידים אחרים במחלקה $aH$). כלומר אם $aH = cH$ וגם $bH = dH$ צריך להוכיח ש$(aH)(bH) = (cH)(dH)$.

## משפט

$$[{}^{G}/_{H}] = [G : H] = \frac{|G|}{|H|}$$

# תרגיל

מצאו את כל חבורות המנה של $\mathbb{Z}_6$.

### פתרון

ת"ח של $\mathbb{Z}_n$ היא מהצורה $m \cdot \mathbb{Z}_n$ כאשר $m|n$. המחלקים של 6 הם $1, 2, 3, 6$, לכן הת"ח הן

$$\mathbb{Z}_6, 2\mathbb{Z}_6 =, \{0, 2, 4\}, 3\mathbb{Z}_6 = \{6, 3\}, 6\mathbb{Z}_6 = 0 \cdot \mathbb{Z}_6 = \{0\}$$

לכן חבורות המנה הן:

${}^{\mathbb{Z}_6}/_{\mathbb{Z}_6} = \{\mathbb{Z}_6\}$ - קיבלנו את החבורה הטריוויאלית.

$${}^{\mathbb{Z}_6}/_{\{0\}} = \{0 + \{0\}, 1 + \{0\}, ...5 + \{0\}\}$$

$$\{1\} * \{2\} = \{1\} + \{2\} = \{1 + 2\} = \{3\}$$

קיבלנו ש$\mathbb{Z}_6 \cong {}^{\mathbb{Z}_6}/_{\{0\}}$

$${}^{\mathbb{Z}_6}/_{2\mathbb{Z}_6} = \left\{ \begin{array}{c} 0 + 2\mathbb{Z}_6 = 2 + 2\mathbb{Z}_6 = 4 + 2\mathbb{Z}_6, \\ 1 + 2\mathbb{Z}_6 = 3 + 2\mathbb{Z}_6 = 5 + 2\mathbb{Z}_6 \end{array} \right\}$$

בצורה אינטואיטיבית עשינו $mod_2$ על $\mathbb{Z}_6$ כלומר זיהינו בין כל האיברים שנבדלים בכפולות של 2.

$$\mathbb{Z}_6/3\mathbb{Z}_6 = \left\{ \begin{array}{c} 0+3\mathbb{Z}_6 = 3+3\mathbb{Z}_6, \\ 1+3\mathbb{Z}_6 = 4+3\mathbb{Z}_6, \\ 2+3\mathbb{Z}_6 = 5+3\mathbb{Z}_6 \end{array} \right\}$$

## סימון

נסמן עבור $a,b \in G$

$$a \equiv b \pmod{H} \Leftrightarrow aH = bH \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$$

## הערה

כשכותבים $H \leq K \leq G$ מתכוונים ל$H \leq K; K \leq G$ וגם $H \leq G$, ואילו כשכותבים $H \trianglelefteq G \triangleleft K$ נזהרים כי $H \trianglelefteq K$ וגם $H \trianglelefteq G \not\Leftarrow K \trianglelefteq G$, כלומר אין בהכרח טרנזיטיביות של נורמליות.

## משפט

אם $K \trianglelefteq H \trianglelefteq G$ וגם $K \trianglelefteq G$ אזי $|G/K| = |G/H| \cdot |H/K|$

## תרגיל

הראו ש$\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^{*^2}$ היא חבורה סופית. $\mathbb{R}^{*^2} := \left\{x^2 \middle| x \in \mathbb{R}^*\right\}$.

### פתרון

מיהי $\mathbb{R}^{*^2}$? נקבל את קבוצת המספרים האי שליליים כי העלנו בריבוע($\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$) ולכן

$$\mathbb{R}^{*^2} = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\} \leq \mathbb{R}^*$$

## תרגיל

תהי $A$ חבורה אבלית. הראו ש$A^2$ ת"ח של $A$. מצאו דוגמה נגדית עבור $G$ לא אבלית.

## תרגיל

מהי חבורת המנה $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^+$?

### פתרון

שתי מחלקות $a\mathbb{R}^+, b\mathbb{R}^+$ יהיו שוות $\Leftrightarrow b^{-1}a \in \mathbb{R}^+$.

ב$\mathbb{R}^+$ $b^{-1} = \frac{1}{b}$

$$b^{-1}a = \frac{a}{b} \in \mathbb{R}^+$$

יש שני מקרים כנ"ל: כאשר $a, b$ הם בעלי אותו סימן, לכן יש שתי מחלקות מנה והן $\mathbb{R}^+, (-1)\,\mathbb{R}^+$

$$\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^+ = \left\{\mathbb{R}^+, -\mathbb{R}^+\right\} \cong \mathbb{Z}_2$$

## תרגיל ממבחן

(א) הראו של$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ אין ת"ח איזומורפית ל$\mathbb{Z}$.

(ב) הראו ש$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ אינה נוצרת סופית.
לא קיימים $x_1, ...x_n \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ כך ש$\langle x_1, ...x_n\rangle = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

(ג) הראו שהת"ח הנוצרת ע"י $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}$ במנה $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$היא ציקלית.

### פתרון

(א) נראה שכל איבר $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$הוא מסדר סופי(אם הייתה ת"ח איזומורפית ל$\mathbb{Z}$, אז היה ב$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ איבר מסדר $\infty$).

איבר ב$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$הוא מהצורה $\frac{m}{n} - \mathbb{Z}$ כאשר $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. איבר היחידה הוא $= n\left(\frac{m}{n} + \mathbb{Z}\right)$

$m + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. קיבלנו שהסדר של $\frac{m}{n} + \mathbb{Z}$ מחלק את $n$ ולכן הוא סופי.

השתמשנו במשפט $\boxed{q^n = e \Rightarrow o(q) \mid n}$

(ב) יהיו $x_1, ...x_n \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ החבורה האבלית ולכן $\langle x_1, ...x_n\rangle = \left\{x_1^k, ...x_n^k \middle| k_1, ...k_n \in \mathbb{Z}_n\right\}$

משפט: מנה של אבלית היא אבלית.

בחבורה כללית: $\langle x_1, ...x_n\rangle = \left\{ \begin{array}{c} x_1, ...t_t \\ x_{i_1}, ...x_{i_t} \end{array} \middle| \begin{array}{c} 1 \le i_1, ...i_t \in \mathbb{N} \\ t \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$

הראינו ב(א) שכל איבר הוא מסדר סופי, ולכן $(*)$ $\left\{x_1^{k_1}, ...x_n^{k_n} \middle| 0 \le k_i \le o(x_i)\right\}$ $\langle x_1, ...x_n\rangle =$ ו$\langle x_i\rangle = \left\{x_i^0, x_i^1, ...x_i^{o(x_i)-1}\right\}$. בקבוצה $(*)$ יש מספר סופי של מכפלות ולכן $\langle x_1, ...x_n\rangle$ היא סופית

תרגיל: $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ היא אינסופית. הראו שכל האיברים הבאים שונים זה מזה: $\frac{1}{2^n} + \mathbb{Z}$. רמז: לחקת הפרש ולהראות שהוא אינו ב$\mathbb{Z}$.

(ג) צ"ל $\left\langle \frac{1}{4}+\mathbb{Z}, \frac{1}{6}+\mathbb{Z} \right\rangle \geq {}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$ ציקלית.

$$\left\langle \frac{1}{4}+\mathbb{Z}, \frac{1}{6}+\mathbb{Z} \right\rangle = \left\{ n\left(\frac{1}{4}+\mathbb{Z}\right) + m\left(\frac{1}{6}+\mathbb{Z}\right) \middle| m,n\in\mathbb{Z} \right\}$$

$$= \left\{ \left( \frac{n}{4}+\mathbb{Z}+\left(\frac{m}{6}+\mathbb{Z}\right) \middle| m,n\in\mathbb{Z} \right) \right\}$$

$$= \left\{ \frac{3n+2m}{12}+\mathbb{Z} \middle| m,n\in\mathbb{Z} \right\}$$

אפשר לבדוק: $u\mathbb{Z}+v\mathbb{Z}=\gcd(u,v)\,\mathbb{Z}$ לכן

$$3\mathbb{Z}+2\mathbb{Z}=\gcd(2,3)\,\mathbb{Z}\boxed{=\mathbb{Z}}$$

$$= \left\{ \frac{m}{12}+\mathbb{Z} \middle| m\in\mathbb{Z} \right\} = \left\langle \frac{1}{12} \right\rangle$$

לכן ת"ח הנוצרת ע"י $\frac{1}{12}$ ולכן ציקלית.

## תרגיל

$G$ חבורה, $H \leq \mathbb{Z}(G)$ וגם ${}^{G}/_{H}$ ציקלית. הראו ש$G$ אבלית.

### פתרון

ידוע ש${}^{G}/_{H}$ציקלית. ${}^{G}/_{H}=\langle aH\rangle$. כלומר כל איבר ב${}^{G}/_{H}$ הוא מהצורה $(aH)^n=a^nH$, $n\in\mathbb{Z}$.

יהיו $x,y\in G$, נראה ש$xy=yx$:

ידוע ש$xH=a^nH$ וגם $yH=a^mH$ כאשר $m,n\in\mathbb{Z}$. קיימים $h_1,h_2$ כך ש$x=a^nh_1$ וגם $y=a^mh_2$

$$xy=a^nh_1a^mh_2=a^na^mh_1h_2=a^mh_2a^nh_1=yx$$

ולכן $x,y$ מתחלפים לכל $x,y\in G$ ולכן $G$ אבלית.

# משפט איזו 1

$G,H$ חבורות, $\varphi: G\to H$ אפימורפיזם. אזי ${}^{G}/_{\ker\varphi}\cong H$.

### מסקנות

1. אם $\varphi : G \to H$ הומ' אזי $\varphi : G \to \mathrm{Im}\varphi$ היא אפימורפיזם ואז נקבל $G/_{\ker\varphi} \cong \mathrm{Im}\varphi$

2. כל ת"ח ניתן להציג כגרעין של אפימורפיזם ע"י:
תהי $N \trianglelefteq G$. נגדיר: $\pi : G \to G/N$ ע"י $\pi (g) = gN$ ($\pi$ פעולת מודולו $H$). אזי $\pi$ היא אפימורפיזם

$$\ker\pi = \{x \in G | xN = N\} = \{x \in G | x \in N\} = N$$

לפי איזו 1: $G/N \cong G/_{\ker\pi} = G/N$

## תרגיל

הראו ש-$\mathbb{C}^*/S^1 \cong \mathbb{R}^+$ כאשר $S^1 = \{z \in \mathbb{C}^* | |z| = 1\}$ מעגל היחידה במישור המרוכב.

### פתרון

נרצה להשתמש באיזו 1. $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^+$ כך שהגרעים הוא $S^1$

$$\varphi (z) = |z|$$

$$\varphi (zw) = |zw| = |z| |w| = \varphi (z) \varphi (w)$$

ולכן $\varphi$ הומו'. $\varphi$ על שכן לכל $r \in \mathbb{R}^+$, $\varphi (r) = |r| = r$, ולכן $\varphi$ על. לכן $\varphi$ אפי.

$$\varphi (z) = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$z = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$z \in S^1$$

$$\Updownarrow$$

לכן $\ker\varphi = S^1$

## תרגיל

$$G = GL_n (\mathbb{C})$$

$$A = \{M \in G | |\det M| = 1\}$$

הראו ש-$A \triangleleft G$ וגם $G/A$ אבלית.

### פתרון

נבנה $\varphi : G \to \mathbb{R}^{+}$ כך ש$A$ $\ker\varphi = A$.

$$\varphi\left(x\right) = \left|\det x\right|$$

<u>$\varphi$ הומו</u> $\varphi\left(xy\right) = \left|\det xy\right| = \left|\det x \det y\right| = \left|\det x\right|\left|\det y\right| = \varphi\left(x\right)\varphi\left(y\right)$

<u>$\varphi$ על</u> $r \in \mathbb{R}$. צריך למצוא $x \in G$ כך ש$\left|\det\left(x\right)\right| = r$

$$\left|\begin{pmatrix} r & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\right| = r$$

המטריצה הפיכה ולכן $\varphi$ על.

$\ker\varphi = A \Leftarrow A \trianglelefteq G$ - קיבלנו במתנה ש$A$ ת"ת. $\mathbb{R}^{+} \cong {}^{G}/_{a}$. $\mathbb{R}^{+}$ אבלית ולכן ${}^{G}/_{A}$ אבלית.