(המשך הדוגמה מסוף השיעור הקודם)

$$A,B\subseteq\mathbb{R}^2$$

$$X=A\cup B$$

נניח $\varphi:[0,1]\to X$ מסילה כך ש$\varphi(0)\in A$. נראה שבהכרח $\varphi(t)\in A$ לכל $t\in[0,1]$.
נביט ב$\varphi^{-1}(A)$:

1. היא לא ריקה(כי $0\in\varphi^{-1}(A)$)
2. היא סגורה(כי A סגורה בX)
3. כעת נוכיח שהיא גם פתוחה.

כיוון ש$[0,1]$ קשיר בהכרח נקבל $\varphi^{-1}(A)=[0,1]$, כלומר $\varphi(t)\in A$ לכל $t\in[0,1]$. נניח $t\in\varphi^{-1}(A)$($\varphi(t)\in A$). נראה שיש $\varepsilon>0$ כך שלכל $|s-t|$ גם $s\in\varphi^{-1}(A)$($\varphi(s)\in A$).
נניח בה"כ $\varphi(t)|_y>-1$. נביט ב

$$U=\left\{a\in X\middle|a|_y>-1\right\}$$

זוהי קבוצה פתוחה בX, והיא סביבה של $\varphi(t)$.
כיוון שφ רציפה יש $\varepsilon>0$ כך ש$\varphi(s)\in U$ לכל $s\in[0,1]$ המקיים $|s-t|<\varepsilon$

$$a\in\mathbb{R}^2$$

אז $a|_x\,,\,a|_y$ יסמנו את הקואורדינטה.
נניח $\varphi:[0,1]\to X$ מסילה כך ש$\varphi(0)\in A$. נראה שבכהרח $\varphi(t)\in A$ לכל $t\in[0,1]$.

טענה

$A\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה. אז A קשיר אס"ם A קשיר מסילתית, ומרכיבי הקשירות המסילתית של A מלתכדים, והם פתוחים.

הוכחה בסדר הפוך

$\Leftarrow$ מרכיבי הקשירות המסילתית הם קבוצותו פתוחות ב$\mathbb{R}^n$ ולכן ודאי פתוחות בA.

כל מרכיב קשירות מסילתית מוכל במרכבים קשירות, ומרכיב קשירות הוא איחוד מרכיבי הקשירות המסילתית שמוכלים בו.

יהי C מרכיב קשירות ונניח בשלילה שהוא מכיל יותר ממרכיב קשירות מסילתית אחד.

$$C=\bigcup_{\alpha\in I}D_\alpha$$

D_α מרכיבי קשירות מסילתית. ונניח $|I|>1$. ניקח $\beta\in I$ ונקבל הצגה $C=D_\beta\cup\left(\bigcup_{\alpha\neq\beta}D_\alpha\right)$ - סתירה לכך שC קשיר.

יהי X מ"ט

הגדרות

1. אוסף קבוצות $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ נקרא כיסוי פתוח של X אם:

i. $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = X$ — כיסוי ⇐

i. כל U_α פתוח — פתוח ⇐

2. אם $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי, תת כיסוי פירושו $J\subseteq I$ כך ש$\bigcup\limits_{\alpha\in J} U_\alpha = X$.

3. תת כיסוי סופי הוא תת כיסוי שעבורו J קבוצה סופית.

הגדרה

יהי X מ"ט, אזי X נקרא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח של X יש תת כיסוי סופי.

דוגמה למרחב שאיננו קומפקטי: $\mathbb{R}^n$

$$\{B(0,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

הוא כיסוי פתוח שאין לו תת כיסוי סופי.

הגדרה

יהי X מ"ט, $A\subseteq X$.

כיסוי פתוח של A בX הוא אוסף $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של תתי קבוצות פתוחות בS כך ש$\bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha \supseteq A$.

תת כיסוי הוא $J\subseteq I$ כך ש$\bigcup\limits_{\alpha\in J} U_\alpha \supseteq A$.

משפט

יהי X מ"ט כלשהו, $A\subseteq X$. אזי A קומפקטי אם"ם לכל כיסוי פתוח של A בX יש תת כיסוי סופי.

הוכחה

⇐ נניח A קומפקטי ו$\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ <u>כיסוי פתוח של A בX</u>, אזי האוסף $\{U_\alpha\cap A\}_{\alpha\in I}$ הוא <u>כיסוי פתוח של A</u>. A קומפקטי, לכן יש $J\subseteq I$ <u>סופי</u> כך ש$\bigcup\limits_{\alpha\in J}(U_\alpha\cap A)=A$, ומכאן שעבור אותו J, $A \supseteq \bigcup\limits_{\alpha\in J} U_\alpha$.

⇒ נניח שהתנאי על כיסויים בX מתקיים, ונניח שA מרחב קומפקטי. יהי $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של A(כלומר $V_\alpha\subseteq A$, V_α פתוחים בA, $\bigcup\limits_{\alpha\in I} V_\alpha = A$).

מהגדרת הטופולוגיה על A לכל $\alpha \in I$ יש קבוצה $X \subseteq U_\alpha$ פתוחה בX כך ש$A \cap V_\alpha = U_\alpha$.

$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \supseteq A$. מהתנאי קיימת $I \subseteq J$ סופית כך ש$\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \supseteq A$. אזי

$$\bigcup_{\alpha \in J} = \bigcup_{\alpha \in J} (U_\alpha \cap A) = \left(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \right) \cap A = A$$

משפט

יהיו X, Y מ"ט, X קומפקטי, $f : X \to Y$ רציפה ועל.
אזי Y קומפקטי.

מסקנה

אם הכל כנ"ל מלבד הדרישה שf על, אז נכון ש$f\left(X\right)$ קומפקטי.

הוכחת המשפט

יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ כיסוי פתוח של Y. צריך למצוא לו תת כיסוי סופי.
האוסף $\left\{f^{-1}\left(U_\alpha\right)\right\}_{\alpha \in I}$ כיסוי פתוח של X.

$$\bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}\left(U_\alpha\right) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \right) = f^{-1}\left(Y\right) = X$$

X קומפקטי, לכן יש $I \subseteq J$ סופית כך ש$\bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}\left(U_\alpha\right) = X$

טענה: עבור אותה קבוצה סופית J מתקיים $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha = Y$

זה תמיד נכון: $f\left(f^{-1}\left(U_\alpha\right)\right) \subseteq U_\alpha$, $\bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}\left(U_\alpha\right) = X$ ולכן

$$Y = f\left(X\right) = f\left(\bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}\left(U_\alpha\right) \right) = \bigcup_{\alpha \in J} f\left(f^{-1}\left(U_\alpha\right)\right) \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$$

לכן $Y = \bigcup_{a \in J} U_\alpha$.

משפט

יהי X מ"ט קומפקטי, $A \subseteq X$ סגורה[1] בX.
אזי A קומפקטי[2].

---

[1] "סגורה" בלשון נקבה - כי A קבוצה. סגירות זו תכונה של קבוצות.
[2] "קומפקטי" בלשון זכר - כי A מרחב. קומפקטיות זו תכונה של מרחבים.

הוכחה

נשתמש בתנאים שהוכחנו לקומפקטיות של תת מרחב.
יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של A בX(כלומר $U_\alpha \subseteq X$, U_α פתוחים בX, $A \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$).
אזי האוסף הבא הוא כיסוי פתוח של X:

$$\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}\cup\{A^c\}$$

(A^c פתוחה כי A סגורה)
X קומפקטי, לכן יש לכיסוי הנ"ל תת כיסוי סופי. בלי הגבלת הכלליות נניח שA^c משתתף בתת הכיסוי הסופי. אזי $U_{\alpha_1},\dots U_{\alpha_n}$ כיסוי של A. כלומר $A \subseteq U_{\alpha_1}\cup\dots\cup U_{\alpha_n}$.

הגדרה

יהי X מ"ט. אנו נאמר שX הוא האוסדורף(או T_2) אם לכל $a\neq b\in X$ יש קבוצות פתוחות זרות U,V כך ש$a\in U, b\in V$.

דוגמה

כל מרחב מטרי הוא האוסדורף.

הוכחה

יהי M מרחב מטרי. יהיו $a\neq b\in M$. נסמן $r=\frac{1}{2}d(a,b)$. $r>0$ כי $a\neq b$, ונקבל סביבות

$$B(a,r)\qquad B(b,r)$$

הן זרות(תרגיל עם אי שוויון המשולש)

הגדרה

מרחב נקרא T_1אם כל נקודות $\{p\}$ הוא קבוצה סגורה.

טענה

$$T_2\Rightarrow T_1$$

הוכחה

נניח X הוא T_2(כלומר האוסדורף) ותהי $p \in X$. אזי לכל $x \neq p$ יש U_x, V_x פתוחות זרות כך ש

$$p \in U_x \qquad x \in V_x$$

בפרט $p \notin V_x$, כלומר $V_x \subseteq \{p\}^c$. לכן $\{p\}^c = \bigcup_{x \in \{p\}^c}$ (ל"ש - למה שימושית), ולכן $\{p\}^c$ פתוחה.

משפט

יהי X מ"ט האוסדורף. יהי $A \subseteq X$.
אזי A גם כן האוסדורף.

הוכחה

יהי $a \neq b \in A$. כיוון שX האוסדורף, יש $U, V \subseteq X$ זרות, פתוחות בX, כך ש$a \in U, b \in V$.
הקבוצות $U \cap A, V \cap A$ זרות, פתוחות בA ומקיימות $a \in U \cap A, b \in V \cap A$.

משפט

יהי X מ"ט האוסדורף. יהי $A \subseteq X$ קומפקטי. אזי A קבוצה סגורה בX.

הוכחה

לכל $p \notin A$ אנו נמצא סביבה U כך ש$U \subseteq A^c$, ולכן מהל"ש נקבל שA^c פתוחה.
לכל $a \in A$ יש סביבות <u>זרות</u> U_a, V_a בX כך ש

$$a \in U_a \qquad p \in V_a$$

האוסף $\{U_a\}_{a \in A}$ הוא כיסוי פתוח של A בX. A קומפקטי, לכן יש אוסף סופי $a_1, \dots a_n$ כך ש$A \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} U_{a_i}$. נסמן $V = \bigcap_{1 \leq i \leq n} V_{a_i}$.

טענה: $p \in V \subseteq A^c$ - ודאי כי $p \in V_{a_i}$ לכל a_i

נותר להראות $V \subseteq A^c$. מתקיים $V_{a_i} \subseteq U_{a_i}^c$, ו

$$\bigcap_{1 \leq i \leq n} V_{a_i} \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} U_{a_I}^c = \left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} U_{a_i} \right)^c \subseteq A^c$$

(ההכלה האחרונה נובעת מכך ש$A \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} U_{a_i}$)

תזכורת

$f : X \to Y$ נקראת סגורה אם לכל $S \subseteq X$ סגורה בX מתקיים $f(S)$ סגורה בY.

משפט

יהיו X,Y מ"ט, X קומפקטי, Y האוסדורף, ותהי $f:X\to Y$ רציפה.
אזי f סגורה.

הוכחה

תהי $S\subseteq X$ סגורה.

א. X קומפקטי, לכן S קומפקטי(כי S סגורה בX)

ב. $f\left(S\right)$ קומפקטי(תמונה רציפה של S שהוא קומפקטי)

ג. Y האוסדורף, $f\left(S\right)$ קומפקטי, לכן $f\left(S\right)$ סגורה בY.

מסקנה

יהיו X,Y מ"ט, X קומפקטי, Y האוסדורף, $f:X\to Y$ רציפה, חח"ע ועל.
אזי f היא הומאומורפיזם.

הגדרה

יהי X,Y מ"ט.
העתקה $f:X\to Y$ נקראת שיכון אם אחרי צמצום הטווח ל$f\left(X\right)$ ההעתקה $f:X\to f\left(X\right)$ היא הומאומורפיזם. (בפרט f רציפה וחח"ע, אך היא מקיימת יותר מזה)

דוגמה

העתקת ההכלה היא תמיד שיכון, כי אם $i:A\to X$ ההכלה, אז אחרי צמצום הטווח $\mathrm{Id}:A\to A$

דוגמה להעתקה רציפה שאינה שיכון

העתקה מהקטע $[0,2\pi)$ למישור $f\left(x\right)=\left(\cos x,\sin x\right)$ איננה שיכון - שכן איננה הומאומורפיזם - הקטע $[0,2\pi)$ אינו הומאומורפי למעגל.

משפט

יהיו X,Y מ"ט, X קומפקטי, Y האוסדורף. $f:X\to Y$ רציפה וחח"ע.
אזי f היא שיכון.

הוכחה

$f\left(x\right)$ האוסדורף כי הוא תת מרחב של Y.