משפט

יהיו X, Y מ"ט קומפקטיים, אזי גם $X \times Y$ קומפקטי.
(מסקנה: לכל אוסף סופי, $X_1, \dots X_n$ של מ"ט קומפקטיים גם $X_1 \times \dots \times X_n$ קומפקטי.)

טענה

אם Z מרחב טופולוגי, B בסיס לטופולוגיה על Z, אזי Z קומפקטי אם"ם לכל כיסוי של Z ע"י קבוצות מB יש תת כיסוי סופי.

חזרה להוכחת המשפט

יהי $\{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף של קבוצות בסיס(כלומר $U_\alpha \subseteq X$ פתוחה בX, $V_\alpha \subseteq Y$ פתוחה בY לכל α).

...

לכל $a \in X$ נביט בתת המרחב $\{a\} \times Y \subset X \times Y$. $\{a\} \times Y \cong Y$ ולכן $\{a\} \times Y$ קומפקטי.

האוסף $\{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha j i I}$ כיסוי פתוח של $\{a\} \times Y$ ב$X \times Y$.

יתרה מזאת, אם נביט באוסף

$$J := \{\alpha \in I | a \in U_a\}$$

אזי גם $\{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ כיסוי של $\{a\} \times Y$, כי אם $a \notin U_\alpha$ אז $U_\alpha \times V_\alpha$ זר ל$\{a\} \times Y$ ולכן ניתן להשמיט קבוצה זו ועדיין כל נקודות $X \times Y$ יכוסו.

$\{a\} \times Y$ קומפקטי ולכן יש לכיסוי $\{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ תת כיסוי סופי, כלומר $\alpha_1, \dots \alpha_n$ כך ש$\bigcup\limits_{1 \leq i \leq n} U_{\alpha_i} \times V_{\alpha_i} \supseteq \{a\} \times Y$ וגם $a \in U_{\alpha_i}$ לכל $1 \leq i \leq n$.

נשים לב שבהכרח $\bigcup\limits_{1 \leq i \leq n} V_{\alpha_i} = Y$ כי בהינתן $y \in Y$ הנק' (a, y)נמצאת באחת הקבוצות $U_{\alpha_I} \times V_{\alpha_i}$, כלומר בפרט $y \in V_{\alpha_i}$.

נסמן $W_a = \bigcap\limits_{1 \leq i \leq n} U_{\alpha_i}$. W_a פתוחה וכן $a \in W_a$, וכן מתקיים $W_a \times Y \subseteq \bigcup\limits_{1 \leq i \leq n} U_{\alpha_i} \times V_{\alpha_i}$. זה נובע משוויון כללי של קבוצות, שלכל שני אופסים $\{A_\alpha\}_{\alpha \in K}, \{B_\alpha\}_{\alpha \in K}$ מתקיים

$$(x, y) \in \left(\bigcup_{\alpha \in K} A_\alpha \right) \times \left(\bigcup_{\alpha \in K} B_\alpha \right) \subseteq \bigcup_{a \in K} (A_\alpha \times B_\alpha)$$

יש $\beta \in K$ כך ש$y \in B_\beta$. עבור אותו הβ מתקיים $x \in A_\beta$(כי $x \in A_\alpha$ לכל $\alpha \in K$) $\Leftarrow$ $(x, y) \in A_\beta \times B_\beta$.

מכאן

$$W_a \times Y = \left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} U_{\alpha_i} \right) \times \left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} V_{\alpha_i} \right) \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} U_{\alpha_i} \times V_{\alpha_i}$$

כך נשעה לכל $a \in X$ וכך כל $a \in X$ יגדיר סביבה W_a. לכל $a \in X$, W_a מוכל באיחוד של אוסף <u>סופי</u> מבין קבוצות הכיסוי.

האוסף $\{W_a\}_{a\in X}$ הוא כיסוי פתוח של X. X קומפקטי. לכן יש $a_1,\dots a_l$ כך ש$\bigcup\limits_{1\le j\le l} W_{a_j}=X$.

לכל $1\le j\le l$ יש מספר סופי של קבוצות מהצורה $U_\alpha\times V_\alpha$ כך ש$W_{a_j}\times Y$ מוכל באיחודן.

כאשר נצרף את כל הקבוצות $U_\alpha\times V_\alpha$ הללו עבור $1\le j\le l$ נקבל אוסף סופי של קבוצות מהכיסוי המקורי שאיחודן הוא כל $X\times Y$.

נביט במצב מעט שונה

$\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$, $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in I}$(אותה קבוצת אינדקסים), ולכן $\alpha\in i$ יש פונקציה רציפה $f_\alpha:Y_\alpha\to X_\alpha$. נגדיר

$$\left(\Pi_{\alpha\in I}f_\alpha\right):\prod_{\alpha\in I}Y_\alpha\to\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$$

בהנתן $(y_\alpha)_{\alpha\in I}$[1], $\left(\prod\limits_{\alpha\in I}f_\alpha\right)\left((y_\alpha)_{\alpha\in I}\right)$ הוא האיבר ב$\prod\limits_{\alpha\in I}X_\alpha$, שהרכיב ב$\alpha$ הוא $f_\alpha\left(y_\alpha\right)$.
ניתן לסמן זאת כך:

$$\left(\prod_{\alpha\in I}f_\alpha\right)\left((y_\alpha)_{\alpha\in I}\right)=\left(f_\alpha\left(y_\alpha\right)\right)_{\alpha\in I}$$

כדי לראות ש$\prod\limits_{\alpha\in I}f_\alpha$ רציפה צריך לבדוק שכל אחד מהרכיבים שלה רציף, והרכיב הβ הוא $(y_\alpha)_{\alpha\in I}\mapsto f_\beta\left(y_\beta\right)$. היא רציפה כי היא הרכבה של הפונקציות

$$\prod_{\alpha\in I}Y_\alpha\xrightarrow{\text{projection}}Y_\beta\xrightarrow{f_\beta}X_\beta$$

כיוון שלכל β ראינו שהרכיב הβ של $\prod\limits_{\alpha\in I}f_\alpha$ רציף. לכן הפונקציה $\prod\limits_{\alpha\in I}f_\alpha$ רציפה.

משפט

יהי X מ"ט כלשהו, $f,g:X\to\mathbb{R}$ שתי פונקציות רציפות. אזי $f+g$ רציפה, $f\cdot g$ רציפה.
אם f לא מתאפסת בשום מקום אז $\frac{1}{f}$ רציפה.

לדוגמה

ניקח $f\cdot g$. ראשית, הפונקציה $\underset{(x,y)\mapsto x\cdot y}{m:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$ רציפה(זהו פולינום בx,y). את $f\circ g$ ניתן להציג כהרכבה

$$\begin{array}{ccccc}X & \xrightarrow{(f,g)} & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \xrightarrow{m} & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \left(f\left(x\right),g\left(x\right)\right) & \mapsto & f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)\end{array}$$

[1] הכוונה בסימון היא ל$|I|$יה, לאו דווקא סדורה, שבמקום הα הרכיב הוא y_α.

איחוד זר

ראינו כבר 2 דרכים לבנות מרחבים טופולוגיים חדשים מתוך מרחבים טופולוגיים נתונים:

1. תת מרחבים
2. מכפלה קרטזית של מרחבים

כעת נראה דרך שלישית - איחוד זר של מרחבים.

הגדרה

יהיו $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של מרחבים טופולוגיים.
ראשית נחליף את קבוצות הנקודות בכל X_α באופן שהם **כולם יהיו זרים זה לזה**.
למשל, ניתן להחליף כל X_α ב$X_\alpha \times \{\alpha\}$(כלומר $x\in X_\alpha$ יהפוך ל(x,α), ואז נדע שהוא בא מX_α).
אחרי ביצוע הפעולה הזאת אנו מניחים שX_α כולם זרים.
כעת נגדיר מ"ט $\coprod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$ (נקרא "איחוד זר") באופן הבא:

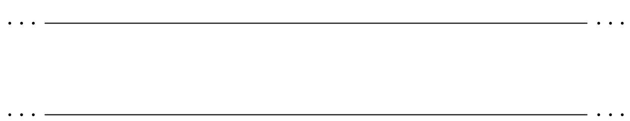
- קבוצת הנקודות היא $X=\bigcup\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$
- **והטופולוגיה:**

  תת קבוצה של X תחשב פתוחה אם היא מהצורה $\bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$ כאשר $U_\alpha\subseteq X_\alpha$ פתוחה בX_α.

מהבניה נובע שלכל β, $X_\beta \subseteq \coprod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$

דוגמה

$R\coprod R$ - יש תת מרחב ב$\mathbb{R}^2$ שהומאומורפי ל$\mathbb{R}\coprod\mathbb{R}$:



טענה

העתקת ההכלה $i_\beta : X_\beta \to \coprod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$ היא רציפה ופתוחה. **<u>בפרט היא שיכון</u>**.

טענה

לכל $f : \coprod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha \to Y$, f רציפה אס"ם $f \circ i_\alpha$ רציפה לכל α.

בלשון של צמצומים

$f : \coprod\limits_{\alpha} X_\alpha \to Y$ רציפה אס"ם $f|_{X_\alpha}$ רציפה לכל α.

מרחבי מנה

כעת נראה את הדרך הרביעית לבנות מרחבים טופולוגיים חדשים מתוך מרחבים קיימים.

הגדרה

יהי X מרחב טופולוגי ויהי $\sim$ יחס שקילות על X.
נסמן ב-$\hat{X}$ את קבוצת מחלקות השקילות. נרצה לבנות טופולוגיה על $\hat{X}$.
קיימת ההעתקה הטבעית $\rho : X \to \hat{X}$ המוגדרת ע"י $\rho(a) = [a]$.
$V \subseteq \hat{X}$ תחשב פתוחה אם $\rho^{-1}(V)$ פתוחה ב-X.
(דרך אחרת לחשוב על $\rho^{-1}(V)$: $\rho^{-1}(V)$ הוא איחוד המחלקות ב-V)
צריך להראות שזהו אכן טופולוגיה - <u>תרגיל</u>.

משפט

(א) ההעתקה $\rho : \hat{X} \to X$ רציפה.

(ב) לכל מ"ט Y ולכל העתקה $f : \hat{X} \to Y$, f רציפה אס"ם $f \circ \rho$ רציפה.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f\circ\rho"] \arrow[dr, "\rho"'] & & Y \\ & \hat{X} \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

הוכחה

(א) תהי $V \subseteq \hat{X}$ פתוחה. אזי $\rho^{-1}(V)$ פתוחה מהגדרת הטופולוגיה על $\hat{X}$.
(הטופולוגיה שבחרנו על $\hat{X}$ היא הטופולוגיה המקסימלית שעבורה ρ רציפה)

(ב) $\Leftarrow$ אם f רציפה, מ(א) נובע ש-$f \circ g$ רציפה.

$\Rightarrow$ נניח ש-$f \circ \rho$ רציפה. תהי $w \subseteq Y$ פתוחה. צ"ל $f^{-1}(w)$ פתוחה. ידוע ש-$(f \circ g)^{-1}(w)$ פתוחה, אולם

$$(f \circ g)^{-1}(w) = \rho^{-1}\left(f^{-1}(w)\right)$$

הקבוצה $f^{-1}(w) \subseteq \hat{X}$ מקיימת ש$\rho^{-1}\left(f^{-1}(w)\right)$ פתוחה בX.
מהגדרת הטופולוגיה ב$\hat{X}$ נקבל ש$f^{-1}(w)$ פתוחה.

שימוש במשפט

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\rho"'] & & Y \\ & \hat{X} \arrow[ur, "\hat{g}"'] & \end{tikzcd}$$

אם $g : X \to Y$ פונקציה רציפה שמכבדת את יחס השקילות, כלומר לכל $a, b \in X$ אם $a \sim b$ אז $g(a) = g(b)$, אזי g משרה פונקציה $\hat{g} : \hat{X} \to Y$ ע"י $\hat{g}([a]) := g(a)$.
ההגדרה בלתי תלויה בנציג כי g מכבדת את יחס השקילות.
מתקיים $g = \hat{g} \circ \rho$. הנחנו שg רציפה, ומהמשפט נובע ש$\hat{g}$ רציפה.

דוגמה

$X = [0,1]$ יחס השקילות הנוצר על ידי $0 \sim 1$.
(כלומר יחס השקילות המינימלי שכולל את $0 \sim 1$)
כיצד מגדירים העתקה רציפה $\widehat{[0,1]} \to \mathbb{R}$?
היא תמיד מושרית ע"י העתקה רציפה $f : [0,1] \to Y$ שמקיימת $f(0) = f(1)$.
$Y = S^1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 = 1\right\}$(מעגל היחידה)

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \end{array}$$

ואח"כ צמצום הטווח לS^1.

הערה: g לא חייבת להיות חח"ע. לדוגמה, ניתן להגדיר

$$h : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sin \pi t \end{array}$$

משרה

$$\hat{h} : [0,1] \to \mathbb{R}$$

בדוגמאות הנ"ל:

- $\hat{g}$ חח"ע
- $\hat{h}$ אינה חח"ע

$\hat{g} : \widehat{[0,1]} \to S^1$ רציפה, חח"ע ועל $\Leftarrow$ לכן $\hat{g}$ הומאומורפיזם. כמו כן $\widehat{[0,1]}$ קומפקטי, וS^1 הוא האוסדורף.

עוד דוגמה

על $\mathbb{R}$ נגדיר יחס השקילות הבא: $a\sim b$ אם $a-b\in\mathbb{Z}$.

באלגברה מסמנים את $\hat{\mathbb{R}}$ הנ"ל ב$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

נגדיר $k:\mathbb{R}\to S^1$ ע"י $k\left(t\right):=\left(\cos 2\pi t,\sin 2\pi t\right)$. k מכבדת את יחס השקילות, לכן משרה $\hat{k}:\hat{\mathbb{R}}\to S^1$.

גם הכיוון השני נכון. כלומר בכל פעם ש$k\left(a\right)=k\left(b\right)$ מתקיים ש$a-b\in\mathbb{Z}$, כלומר $a\sim b$. ולכן $\hat{k}$ היא חח"ע. היא גם על.

$\hat{k}:\hat{\mathbb{R}}\to S^1$ רציפה, חח"ע ועל.

נגדיר $\rho:\mathbb{R}\to\hat{\mathbb{R}}$. הצמצום $\rho|_{[0,1]}:[0,1]\to\hat{\mathbb{R}}$ רציפה ועל. $[0,1]$קומפקטי, ולכן $\hat{\mathbb{R}}$ קומפקטי.