פונקציות מ$\mathbb{R}$ל$\mathbb{C}$ הן פונקציות מהצורה $z(t) = x(t) + iy(t)$.

הגדרה

תהי $z(t) = x(t) + iy(t)$ מוגדרת בסביבה של t_0. אז נגדיר

$$z'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t} = x'(t) + iy'(t)$$

ובפרט $z'(t_0)$ קיימת $\Leftrightarrow$ $x'(t)$ קיימת ו$y'(t_0)$ שניהם קיימים

הערה

כבר אמרנו שפונקציה רציפה $z(t) = x(t) + iy(t)$ מגדירה "מסילה" במישור: בזמן "t" נמצאים במקום $z(t)$. אם כן, <u>הוקטור</u> $(x'(t), y'(t))$ הוא וקטור המהירות שכיוונו משיק למסילה ואורכו שווה למהירות שבה המסילה מתקדמת בזמן t.

תכונות הנגזרת

1. $(z \pm w)'(t) = z'(t) \pm w'(t)$
2. $[cz(t)]' = cz'(t)$
3. $[z(t)w(t)]' = z(t)w'(t) + z'(t)w(t)$
4. אם $w(t) \neq 0$, $\left(\frac{z}{w}\right)'(t) = \frac{w(t)z'(t) - z(t)w'(t)}{w^2(t)}$

פונקציות מ$\mathbb{C}$ ל$\mathbb{C}$ הן פונקציות מהסוג $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$.

דוגמאות

1. $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u} + i\underbrace{2xy}_{v}$
2. $f(z) = 3\bar{z} - 2z = 3(x+iy) - 2(x+iy) = \underbrace{x}_{u} - i\underbrace{5y}_{v}$
3. $f(z) = |z|^2 = \underbrace{x^2 + y^2}_{u} + \underbrace{0}_{v} i$

---

u וv פונקציות מ$\mathbb{R}^2$ לתוך $\mathbb{R}$. u נקרא החלק הממשי של f: $u = \mathrm{Re}f$, וv הוא החלק המדומה של f: $v = \mathrm{Im}f$.

הגדרה

תהי $z_0 \in \mathbb{C}$ נקודה כלשהי.

- סביבה בסיסית של z_0 היא עיגול פתוח סביב z_0 מהסוג $\{z \in \mathbb{C} || z - z_0| < r\}$.
- סביבה מנוקבת של z_0 היא סביבה כנ"ל פרט לz_0 עצמה: $\{z \in \mathbb{C} | 0 < |z - z_0| < r\}$.

הגדרה

תהי $f(z)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של z_0. נאמר ש$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L \in \mathbb{C}$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $0 < |z - z_0| < \delta$ אז מתקיים $|f(z) - L| < \epsilon$.

משפט 1

תהי $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של $z_0 = x_0 + iy_0$.
אזי התנאים הבאים שקולים:

1. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L = \alpha + i\beta$
2. $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = \alpha$ וגם $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) \to \beta$
3. $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z) - L| = 0$
4. לכל סדרה $z_0 \neq z_n \to z_0$, $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = L$

משפט 2

קיימת אריתמטיקה של גבולות. ז.א.:

1. $\lim\limits_{z \to z_0} (f(z) \pm g(z)) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \pm \lim\limits_{z \to z_0} g(z)$
2. $\lim\limits_{z \to z_0} cf(z) = c \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ לכל קבוע c
3. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) g(z) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \cdot \lim\limits_{z \to z_0} g(z)$
4. אם $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) \neq 0$, $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \to z_0} f(z)}{\lim_{z \to z_0} g(z)}$

כל זה בהנחה ש$\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ ו$\lim\limits_{z \to z_0} g(z)$ קיימים.

הגדרה

תהי $f(z)$ מוגדרת בסביבה שלמה של z_0. נאמר שf רציפה בz_0 אם $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ קיים ושווה ל$f(z_0)$.

משפט 3

יהיו $f(z)$ ו$g(z)$ מוגדרות בסביבת $z_0 = x_0 + iy_0$ ורציפות בz_0. אזי:

1. $f \pm g$, cf וfg רציפות בz_0, ואם $g(z_0) \neq 0$ גם $^f/_g$ רציפה בz_0
2. אם $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ אז הרציפות של f בz_0 שקולה לרציפות של u וv(יחד) בנקודה (x_0, y_0)
3. אם $h(z)$ מוגדרת בסביבת $f(z_0)$ ורציפה ב$f(z_0)$, אזי הפונקציה המורכבת $(h \circ f)(z) = h(f(z))$ רציפה בz_0

נגזרות

נניח ש$f(z)$ מוגדרת בסביבת z_0. נגדיר את הנגזרת של f בz_0 ע"י

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

אם הגבול קיים f גזירה בz_0, ואם לא היא לא גזירה שם.

דוגמת חישוב

$$f(t) = z^2 - 4z + 5$$

נחשב את $f'(z)$ בנקודה כללית "z" ע"פ ההגדרה. ובכן:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta f \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - 4(z + \Delta z) + 5 - \left[z^2 - 4z + 5\right]}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta f \to 0} \frac{\cancel{z^2} + 2z\Delta z + \Delta z^2 - \cancel{4z} - 4\Delta z + \cancel{5} - \cancel{z^2} + \cancel{4z} - \cancel{5}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} 2z - 4 + \Delta z = 2z - 4$$

כמו באינפי!

משפט 4

יהיו $f(z)$ ו$g(z)$ מוגדרות בסביבת z_0 וגזירות בz_0, ויהי c קבוע מרוכב. אזי:

1. $(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$
2. $(cf)'(z_0) = cf'(z_0)$
3. $(fg)'(z_0) = f(z_0)\, g'(z_0) + f'(z_0)\, g(z_0)$

4. אם $g\left(z_0\right)\neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)'\left(z_0\right)=\frac{g\left(z_0\right)f'\left(z_0\right)-f\left(z_0\right)g'\left(z_0\right)}{g^2\left(z_0\right)}$

5. f וg רציפות בz_0

6. אם $h\left(z\right)$ מוגדרת בסביבת $f\left(z_0\right)$ וגזירה ב$f\left(z_0\right)$ אז $\left(h\circ f\right)'\left(z_0\right)=h'\left(f\left(z_0\right)\right)f'\left(z_0\right)$(כלל השרשרת)

7. $c'=0$

8. אם $n\in\mathbb{N}$, $\left(z^n\right)'=nz^{n-1}$

הוכחה

לוקחים מחברת של אינפי 1, מוחקים את כל הxים, מחליפים אותם בzים!

הכללה

- הכללה של 1 ו2: אם $f\left(z\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kf_k\left(z\right)$ כאשר הa_k קבועים מרוכבים וה$f_k\left(z\right)$ גזירות בz_0, אז

$$f'\left(z_0\right)=\sum_{k=1}^{n}a_kf'_k\left(z_0\right)$$

- הכללה של 6(כלל השרשרת): אם $z\left(t\right)$ פונקציה מרוכבת של משתנה ממשי, שהיא גזירה בt_0, ואם $h\left(z\right)$ פונקציה גזירה בנקודה $z\left(t_0\right)$, אז הפונקציה המורכבת $\left(h\circ z\right)\left(t\right)=h\left(z\left(t\right)\right)$ גזירה בt_0 ומתקיים

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(h\circ z\right)\left(t_0\right)=h'\left(z\left(t_0\right)\right)z'\left(t_0\right)$$

הוכחה(של כלל השרשרת)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(h\circ z\right)\left(t_0\right)=\lim_{t\to t_0}\frac{h\left(z\left(t\right)\right)-h\left(z\left(t_0\right)\right)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{h\left(z\left(t\right)\right)-h\left(z\left(t_0\right)\right)}{z\left(t\right)-z\left(t_0\right)}\cdot\frac{z\left(t\right)-z\left(t_0\right)}{t-t_0}=h'\left(z\left(t_0\right)\right)z'\left(t_0\right)$$

דוגמאות חישוב

1. אם $P\left(z\right)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kz^k$ פולינום כלשהו, אז $P'\left(z\right)=\sum\limits_{k=0}^{n}\left(a_kz^k\right)'=\sum\limits_{k=1}^{n}ka_kz^{k-1}$

2. עבור $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $z^{-n} = {}^{1}/_{z^n}$. לפי ארתמטיקה של נגזרות:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(z^{-n}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{z^n} = \frac{z^n(1)' - (1)(z^n)'}{(z^n)^2} = \frac{0 - nz^{n-1}}{z^{2n}} = -nz^{-n-1}$$

3. $f(z) = \bar{z}$. נחשב את הנגזרת:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\cancel{\bar{z}} + \overline{\Delta z} - \cancel{\bar{z}}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

נחשב גבול זה כאשר $\Delta z \to 0$:

- לאורך ציר הx
- לאורך ציר הy

נרשום $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$

- לאורך ציר הx:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{\overline{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

- לאורך ציר הy:

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \Delta z = i\Delta y}} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1$$

כיוון שהגבולות האלה שונים נסיק ש$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ אינו קיים, ומכאן שהפונקציה $\bar{z}$ אינה גזירה באף מקום.

4. $f(z) = |z|^2$. מהו $f'(z)$?

תשובה:

$$f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$$

בדרך השלילה, נניח ש$f(z)$ גזירה בנקודה $z_0 \neq 0$. אם כן, $\bar{z} = \frac{f(z)}{z}$ היא מנה של שתי פונקצות גזירות בנקודה z_0 שבה המכנה $"z" = z_0 \neq 0$. ע"פ משפט 4 הפונקציה $\bar{z}$ גזירה בנקודה z_0, בסתירה לדוגמה 3. הסתירה מוכיחה ש$f(z)$ אינה גזירה בכל $z_0 \neq 0$.

נבדוק את הנגזרת ב$z_0 = 0$. ע"פ ההגדרה

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{|z|^2 - 0}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{z \to 0} \bar{z} = 0$$

ז.א., $f(z) = |z|^2$ גזירה רק בנקודה אחת, $z = 0$, ומתקיים $f'(0) = 0$.

הכללה לדוגמה 3

נניח ש$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ מוגדרת בסביבת $z_0=x_0+iy_0$ והיא גזירה בz_0.

ז.א., קיים $f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$. בפרט גדול זה קיים כאשר $\Delta z\to 0$:

- לאורך ציר הx:

$$f'(z_0)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{f(z_0+\Delta x)-f(z_0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)+iv(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}i\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)-v(x_0,y_0)}{\Delta x}=$$

$$=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)$$

- לאורך ציר הy:

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta z=i\Delta y\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(z_0+i\Delta y)-f(z_0)}{i\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x_0,y_0+\Delta y)+iv(x_0,y_0+\Delta y)}{i\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{i}\frac{u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{\Delta y}+\frac{v(x_0,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{\Delta y}=$$

$$=iu_y(x_0,y_0)+v_y(x_0,y_0)=u_x(x_0,y_0)+iv_0(x_0,y_0)$$

המסקנה היא שאם $f'(z_0)$קיימת אז בהכרח u_x,u_y,v_x,v_y קיימות ב(x_0,y_0) ומקיימות $\begin{cases}u_x=v_y\\ u_y=v_x\end{cases}$ - משוואות קושי־רימן.

סיכום הדברים האחרונים - משפט 5

תהי $f\left(z\right)=f\left(x+iy\right)=u\left(x,y\right)+iv\left(x,y\right)$ מוגדרת בסביבת $z_0=x_0+iy_0$ וגזירה בz_0, אז u_x,u_y,v_x,v_y קיימות ב$\left(x_0,y_0\right)$ ומתקיים

$$f'\left(z_0\right)=\left(u_x+iv_x\right)\left(x_0,y_0\right)=-i\left(u_y+iv_y\right)\left(x_0,y_0\right)$$

ובפרט: ב$\left(x_0,y_0\right)$, $\begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases}$, ז.א. משוואות קושי־רימן מתקיימות.

תזכורת

נניח ש$u:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$ מוגדרת בסביבת $\left(x_0,y_0\right)\in\mathbb{R}^2$. אומרים שהיא דיפרנציאבילית בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$ אם

$$u\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-u\left(x_0,y_0\right)=u_x\left(x_0,y_0\right)\Delta x+u_y\left(x_0,y_0\right)\Delta y+\epsilon\left(\Delta x,\Delta y\right)$$

כך ש$\displaystyle\lim_{(\Delta x,\Delta y)\rightarrow(0,0)}\frac{\epsilon\left(\Delta x,\Delta y\right)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$

משפט 6

תהי $f\left(z\right)=f\left(x+iy\right)=u\left(x,y\right)+iv\left(x,y\right)$ מוגדרת בסביבת $z_0=x_0+iy_0$. נניח שבנקודה $\left(x_0,y_0\right)$ u וv דיפרנציאביליות ומקיימות את משוואות קושי־רימן $\begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases}$.
אזי $f'\left(z_0\right)$ קיימת ו$f'\left(z_0\right)=u_x\left(x_0,y_0\right)+iv_x\left(x_0,y_0\right)$.

הוכחה

לפי הגדרה:

$$f'\left(z_0\right)=\lim_{\Delta z\rightarrow0}\frac{f\left(z_0+\Delta z\right)-f\left(z_0\right)}{\Delta z}$$

נרשום $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$, אז

$$f\left(z_0+\Delta z\right)-f\left(z_0\right)=u\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)+iv\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-\left[u\left(x_0,y_0\right)+iv\left(x_0,y_0\right)\right]=$$

$$=u\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-u\left(x_0,y_0\right)+i\left[v\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-v\left(x_0,y_0\right)\right]=$$

$$=u_x\Delta x+u_y\Delta y+\epsilon_1+i\left[v_x\Delta x+v_y\Delta y+\epsilon_2\right]$$

כאשר כל הנגזרות החלקיות הן בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$. ע"פ קושי־רימן זה שווה

$$u_x\Delta x-v_x\Delta y+\epsilon_1+i\left[v_x\Delta x+u_x\Delta y+\epsilon_2\right]=$$

$$=\left(u_x+iv_x\right)\left(\Delta x+i\Delta y\right)+\epsilon_1+i\epsilon_2=f\left(z_0+\Delta z\right)-f\left(z_0\right)$$

לבסוף

$$f'\left(z_0\right)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f\left(z_0+\Delta z\right)-f\left(z_0\right)}{\Delta z}=\lim_{\Delta x+i\Delta y\to 0}\frac{\left(u_x+iv_x\right)\left(\Delta x+i\Delta y\right)+\epsilon_1+i\epsilon_2}{\Delta x+i\Delta y}=$$

$$=u_x+iv_x+\lim_{\Delta x\to i\Delta y}\frac{\epsilon_1+i\epsilon_2}{\Delta x+i\Delta y}$$

וכיוון ש$|\Delta x+i\Delta y|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$,

$$\lim_{\Delta x+i\Delta y\to 0}\frac{\epsilon_1+i\epsilon_2}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{\Delta x+i\Delta y\to 0}\frac{\epsilon_1+i\epsilon_2}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta x+i\Delta y}=0$$

מכל זה נובע שקיים $\left(u_x+iv_x\right)\left(x_0,y_0\right)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f\left(z_0+\Delta z\right)-f\left(z_0\right)}{\Delta z}=f'\left(z_0\right)$.

מ.ש.ל.

הערות

1. אפשר להוכיח שאם $f'\left(z_0\right)$ קיימת אז נובע שu וv דיפרנציאביליות ב(x_0,y_0), ולכן התנאים של משפט 6 הכרחיים ומספיקים לקיום הנגזרת.
2. מוכיחים באינפי 3 שאם u_x וu_y קיימות בסביבת (x_0,y_0) ורציפותב(x_0,y_0) אז u דיפרנציאבילית ב(x_0,y_0).

לכן באופן מעשי כדי לבדוק אם פונקציה $f=u+iv$ גזירה בנקודה $z_0=x_0+iy_0$ יש לבדוק שu_x,u_y,v_x,v_y רציפות ב(x_0,y_0)ומקיימות שם משוואות קודי־רימן.

דוגמאות

1. $f\left(z\right)=\bar{z}=x-iy$

$$u=x,v=-y$$

לu וv יש נגזרות חלקיות רציפות בכל $\mathbb{C}$. נבדוק את קושי רימן:

$$u_x=1,v_y=01$$

לא שווים!

$$u_y=0=-v_x$$

המשוואה $u_y=-v_x$ מתקיימת בכל מקום. $u_x=v_y$ נכשלת בכל מקום. וכיוון שדורשים את שתי המשוואות הפונקציה לא גזירה באף מקום.

2. $f\left(z\right)=\left|z\right|^2=x^2+y^2+i$

$$u=x^2+y^2$$

$$v=0$$

פשוט ש u_x,u_y,v_x,v_y רציפות בכל $\mathbb{R}^2$. נבדוק קושי רימן

$$u_x=2x,v_y=0$$

$$x=0\Leftrightarrow u_x=v_y$$

ז.א.

$$u_y=2y$$

$$-v_x=0$$

אז

$$y=0\Leftrightarrow u_y=-v_x$$

לכן $f(z)=|z|^2$ גזירה אך ורק בנקודה $(0,0)$, ז.א. ב$0=z=0+i0$.

3. הכללה של 2. נניח ש$f(z)$ פונקציה מרוכבת שמקבלת רק ערכים ממשיים. ז.א. $f(x+iy)=u(x,y)+i0$. אם f גזירה אז

$$u_x=v_y=0$$

$$u_y=-v_x=0$$

לכן אם f גזירה בכל המישור בהכרח $u=c$ וכבר נתון $v=0$, לכן f פונקציה קבועה.

4. הכללה של דוגמה 2. נניח ש

$$f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$$

גזירה בכל המישור(או בתחום פתוח וקשיר), וגם $\overline{f(x+iy)}=u+iv$ גזירה באותו תחום. נוכיח שf קבועה!

הוכחה: כיוון שf גזירה בתחום "D" לכל $D\ni(x_0,y_0)$

$$u_x=v_y,u_y=-v_x$$

אבל גם $\bar{f}$ גזירה בD ולכן

$$u_x=(-v)_y\,,u_y=-(-v)_x$$

נחבר את הדברים:

$$-v_y=u_x=v_y$$

$$v_x = u_y = -v_x$$

מכאן שבתחום D

$$v_x = v_y = 0$$

לכן v קבוע.

גם נובע $u_x = v_y = 0$ בD, ולכן u קבועה בD, לכן $f = u + iv$ קבועה בD.

הגדרה מקובלת

אומרים ש$f\left(t\right)$ אנליטית או הולומורפית בנקודה z_0 אם $f'\left(z\right)$ קיימת בשביבה שלמה של z_0, ואומרים ש$f\left(z\right)$ אנליטית או הולומורפית בנקודה $S \subset \mathbb{C}$ אם היא אנליטית(הולומורפית)בכל נקודה.