## קטגוריות

יש כמה קטגוריות, שבהן יש אובייקטים(קבוצות) והומומורפיזמים בין האובייקטים. למשל:

- קטגוריה של מרחבים טופולוגיים. האובייקטים הם מרחבים טופולוגיים וההומומורפיזמים הם העתקות רציפות.
- קטגוריה של חבורות והומומורפיזמים.

קטגוריה ־ שהיא אוסף של קבוצות ־ היא גדולה מדי בשביל להיות קבוצה ־ לכן טופולוגיה היא מחלקה. אבל עבור כל זוג אובייקטים אוסף ההומומורפיזמים מהווה קבוצה.

לכל אובייקט $A$ קיים הומומורפיזם מיוחד שנקרא העתקת הזהות $I_A : A \to A$. לכל $A \xrightarrow{f} B$ מתקיים $f \circ I_A = I_B \circ f = f$.

הומומורפיזם זה פונקציה מקבוצה אחת לאחרת ששומרת איכשהו(תלוי בקטגוריה) על המבנה. בחבורות, למשל יש פעולת כפל וההומומורפיזם שומר על פעולת הכפל.

## (ה)פנקטור

טופולוגיה אלגברית מגדירה <u>העתקה שומרת מבנה בין אוסף כל המרחבים הטופולוגיים לאוסף כל החבורות</u>. העתקה כזו(מקטגוריה לקטגוריה) נקראת פנקטור.

הפנקטור הזה יוצר חבורה מכל מרחב טופולוגי. נסמן את הפנקטור הזה ב$F$: $X \xrightarrow{F} G$.
הפנקטור הזה צריך גם לשמור את ההומומורפיזמים: לכל העתקה רציפה $X \xrightarrow{\chi} Y$ צריך להתקיים $F(X) \xrightarrow{F(\chi)} F(Y)$ כך ש:

- $F$ שומר על הרכבה: $F(g \circ h) = F(g) \circ F(h)$
- $F$ שומר על יחידה: $F(I_A) = I_{F(A)}$

## הגדרה

מורפיזם $f : A \to B$ תיקרא איזומורפיזם אם קיים $g : B \to A$ כך ש $\begin{matrix} g \circ f = I_A \\ g \circ f = I_B \end{matrix}$

**הערה:** אנו מסתכלים רק על מורפיזמים(הומומורפיזם במקרה של חבורות, העתקות רציפות במקרה של מרחבים טופולוגיים) ולא על כל פונקציה.

## טענה

אם $f : A \to B$ איזומורפיזם ו$F$ פנקטור אז בהכרח $F(f)$ גם כן איזומורפיזם.

### הוכחה

קיימת $g : B \to A$ כנ"ל. יתקיים:

$$F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(I_A) = I_{F(A)}$$

ובאותו אופן

$$F(f)\circ F(g) = F(f\circ g) = F(I_B) = I_{F(B)}$$

כלומר

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, bend left, "F(f)"] & F(B) \arrow[l, bend left, "F(g)"] \end{tikzcd}$$

## למה זה טוב?

כזכור מטופולוגיה, בשביל להראות ששני מרחבים טופולוגיים הם לא הומאומורפיים היינו צריכים למצוא תכונה טופולוגית שמבדילה ביניהם.

- במקרה של קטע פתוח וקטע חצי פתוח השתמשנו בהוצאת נקודה או בקומפקטיות
- במקרה של ישר ומישור השתמשנו בהוצאת נקודה

אבל האם $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^7$? האם $\mathbb{R}^2 - \{a\} \cong \{a,b\}$?

בשלב מסויים נגמרות התכונות שאנו יכולים להשתמש בהם כדי להבדיל בין מרחבים. כאן נכנס מושג הפנקטור - החבורה שאנו מייצרים ממרחב טופולוגי היא תכונה של המרחב הטופולוגי. לכן אם המרחבים הומאומורפיים גם החבורות צריכות להיות איזומורפיות - $A\cong B \Leftrightarrow F(A)\cong F(B)$.

**נשים** ♡ המרנו בעיה קשה אחת לבעיה קשה אחרת - אבל בד"כ הוכחת איזומורפיזם בין חבורות פחות קשה מהוכחת הומאומורפיזם בין מרחבים טופולוגיים.

## מוסכמות

- כאשר נכתוב $f : X \to Y$ נתכוון תמיד למורפיזם(העתקה רציפה במקרה של מרחבים טופולוגיים, הומומורפיזמים במקרה של חבורות). פונקציות רגילות <u>לא קיימות</u> בקטגוריות שלנו.
- נסמן ב$I$ את הקטע הסגור $[0,1]$

## הגדרה

יהיו $X,Y$ מ"ט, $f,g : X \to Y$(**העתקות רציפות**).

נאמר ש$f$ הומוטופית ל$g$ ונסמן $f\sim g$ אם קיימת העתקה(**רציפה**) $H : X\times I \to Y$ כך ש$H(x,0)=f(x)$ לכל $x\in X$ ו$H(x,1)=g(x)$ לכל $x\in X$.

**כלומר:** יש לנו מעבר רציף מהפונקציה $f$ לפונקציה $g$.

**הערה:** כשאומרים ש$H$ רציפה, הכוונה רציפה על מרחב המכפלה $X\times I$ עם טופולוגיית המכפלה.

לפעמים נסמן $h_t(x) = H(x,t)$, ואז $\begin{matrix} h_0 = f \\ h_1 = g \end{matrix}$.

## תרגיל 1

הראו שהיחס $f \sim g$ הוא יחס שקילות.

## תרגיל 2

יהיו $X,Y,Z$ מרחבים טופולוגיים, $\begin{matrix} f,f' : X \to Y \\ g,g' : Y \to Z \end{matrix}$ $\begin{matrix} f \sim f' \\ g \sim g' \end{matrix}$, אזי $g \circ f \sim g' \circ f'$.

כלומר להראות שהומוטופיה משמרת הרכבה.

## קטגוריה חדשה

האובייקטים יהיו מרחבים טופולוגיים, והמורפיזמים יהיו מחלקות הומוטופיה(כלומר מחלקות שקילות ביחס להומוטופיה) של העתקות רציפות.

כלומר אם יש שתי העתקות הומוטופיות אנחנו לא מבדילים ביניהן.

תרגיל 2 אומר שגם אם חושבים עליהם ככה ההרכבה מוגדרת היטב.

## הגדרה

$f : X \to Y$ תיקרא שקילות הומוטופית אם קיימת $g : Y \to X$ כך ש$g \circ f \sim Id_X$ ו$f \circ g \sim Id_Y$.

אם יש שקילות הומוטופית $f : X \to Y$ אנו נאמר ש$X$ שקול הומוטופית ל$Y$ ונרשום $X \simeq Y$.

**נשים** ♡:

- $\sim$ מסמן הומוטופיה
- $\simeq$ מסמן שקילות הומוטופית
- $\cong$ מסמן איזומורפיזם/שקילות