

## אנליזה מודרנית תש"ף - תרגיל 4

להגשה עד 4.12.19

### שאלה 1

תנו דוגמא לפונקציה  $f$  שאינה מדידה לבג, אבל  $|f|$  מדידה לבג.

### שאלה 2

תהי  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  סדרה של קבוצות זרות במרחב מדיד  $(X, S)$ .

1. א. תהי סדרת פונקציות  $g_i : X \rightarrow \mathbb{R}$  מדידות- $S$ . הראו כי  $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_i} g_i$  מתכנסת ומדידה.

2. נניח כי  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = X$ . תהי  $\mathcal{F} = \sigma(\{A_i : i \in \mathbb{N}\})$  ופונקציה  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ . הראו כי  $h$  מדידה- $\mathcal{F}$   $\iff h$  קבועה על כל  $A_i$ .

### שאלה 3

יהי  $(X, S)$  מרחב מדיד ו- $f_1, f_2, f_3 : X \rightarrow \mathbb{R}$  מדידות- $S$ . התבוננו בפולינום הבא המוגדר לכל  $x \in X$ :  $f_1(x)t^2 + f_2(x)t + f_3(x)$ . הראו שקבוצת כל האיברים ב- $X$  עבורם יש לפולינום שני שורשים שונים היא מדידה.

### שאלה 4

יהי מרחב מדיד  $(X, S)$ , ויהיו  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  מדידות- $S$ . הראו כי  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \mathbb{1}_{\{x: g(x) \neq 0\}}$  מדידה- $S$ .

### שאלה 5

נגדיר את  $\mathbb{A} = \{E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mid E = -E\}$ , כלומר אוסף הקבוצות המדידות בורל שהן סימטריות ביחס לראשית.

1. הראו כי  $\mathbb{A}$  היא  $\sigma$ -אלגברה מעל  $\mathbb{R}$ .

2. הראו כי  $f$  מדידה- $\mathbb{A}$  אם ורק אם  $f$  מדידה בורל וזוגית, כלומר  $f(x) = f(-x)$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ .