4.03.14 (1)

שיטות נומריות ותכנות מדעי - הרצאה 2

פתרון מערכת כללית (לאו דווקא לינארית) $f(x)=0$.

$x\in\mathbb{R}^n$, $f\in\mathbb{R}^n$ $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, נניח $f\in C^2$

מחפשים $\tilde{x}$ שמקיים $f(\tilde{x})=0$

שיטת ניוטון-רפסון / Newton-Raphson

נניח שיש "ניחוש טוב" לפתרון $x_0 \Leftarrow x_0=\tilde{x}+\Delta x_0$

נעשה פיתוח בטור טיילור סביב x_0

$$0=f(\tilde{x})\overset{f(x_0-\Delta x_0)}{=} f(x_0)-f'(x_0)\Delta x_0+\frac{1}{2}f''(x^*)\Delta x_0^2$$

$\tilde{x}\le x^*\le x$ (שארית לפי לגרנז')

שגיאה מסדר

$$O(\Delta x^2) \ : \ \left|\frac{1}{2}f''(x^*)\Delta x_0^2\right|\le C\,\Delta x_0^2$$

$$\Delta x_0=[f'(x_0)]^{-1}f(x_0)$$

הנחנו $\det(f'(x_0))\neq 0$

x_1 אמור להיות קרוב יותר טוב (מאוד) $x_1=x_0-\Delta x_0=x_0-[f'(x_0)]^{-1}f(x_0)$

$$x_1=\tilde{x}+O(\Delta x^2)\to x_1=\tilde{x}+\Delta x_1$$

כעת נעשה איטרציה נוספת: נגדיר באופן איטרטיבי

$$\Delta x_k=[f'(x_k)]^{-1}f(x_k)$$

$$x_{k+1}=x_k-\Delta x_k=x_k-[f'(x_k)]^{-1}f(x_k)$$

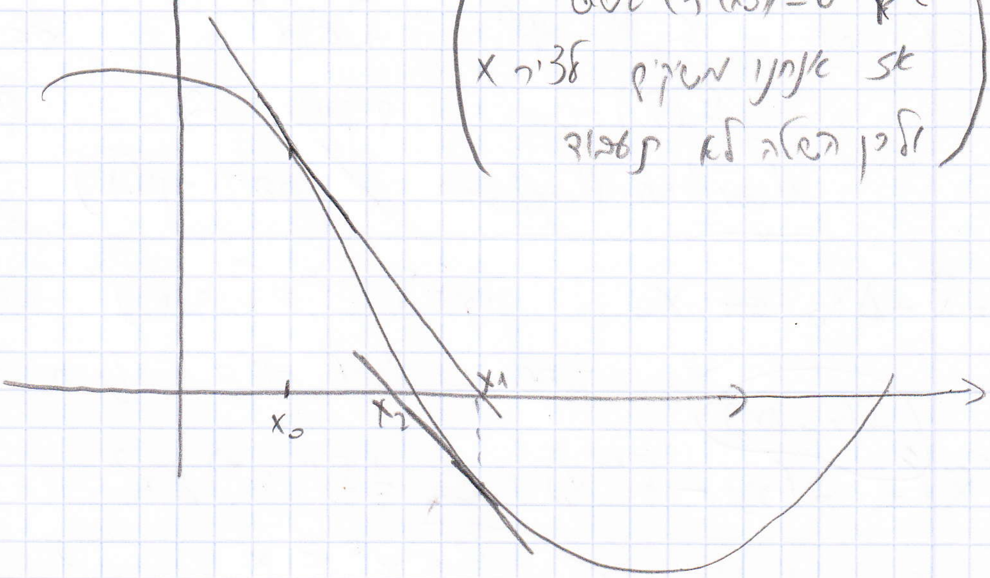
$$O(\Delta x_{k+1})=O(\Delta x_k^2)=O\left(\Delta x_0^{(2^{k+1})}\right)$$

זו התכנסות ריבועית quadratic convergence

הערה: - מוצא פתרון יחיד.

- תאור גרפי לשיטה

(אם $\det(f'(x_k))=0$
אז אנחנו משיקים לציר x
ולכן השיטה לא תעבוד)



- אם Δx_0 מספיק קטן, האיטרציות יתכנסו לפתרון הקרוב.
באופן כללי, א' אפשר להבטיח לאיזה פתרון מתכנסים.
(המשיק יכול להעביר אותנו לפתרון אחר
וזה תלוי בבחירת x_0.)
- אם הנגזרות השניות מאוד קרובות ל-0 אז ההתכנסות איטית.
- במימדים גבוהים, השיטה "יקרה":
  - הפיכת מטריצה בכל איטרציה
  - יתכן שצריך להעריך את f' באופן נומרי.

<u>דוגמא לשיפור של N-R:</u> near identities

פתרון משוואות מהצורה $f(x)=y$ כאשר
$f(x)=x+\varepsilon g(x)$, $|\varepsilon|<<1$.
עבור $\varepsilon=0$ הפתרון הוא y.

$$f'(x)=1+\varepsilon g'(x)$$

- עבור ε מספיק קטן, f' תמיד הפיכה (f' קרובה למטריצת היחידה)
במקום להשתמש ב: $[f'(x_k)]^{-1}$ משתמשים
ב $[f'(x_0)]^{-1}$

4.03.14 (2)

המחיר: מקבלים התכנסות לינארית

Linear Convergence

$$\Delta X = O(\Delta X^k)$$

בשיטה כזו
$$x_{k+1} = x_k - [f'(x_0)]^{-1} f(x_k)$$

זה נקרא modified N-R

נקודת שבת עבור near identity

רוצים לפתור
$$x + \varepsilon g(x) = y$$

g, y ידועים, צ.ל x $\quad 0 \le \varepsilon << 1$

נרשום:
$$x = y - \varepsilon g(x)$$

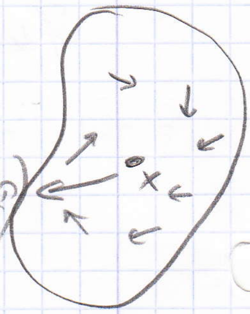
(מערכת דינמית)

ניחוש/תנאי התחלה x_0:
$$x_{n+1} = y - \varepsilon g(x_n)$$

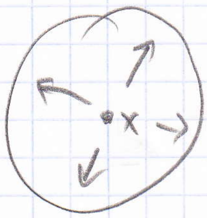
אם $x_n = x$ הפתרון המדויק

$x_{n+1} = x$

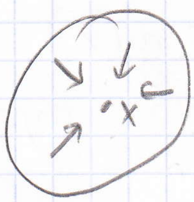
(המפה לא מציגה אבל)



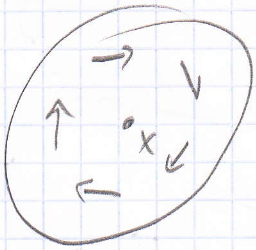
השאלה היא האם במפה:



(II)



(I)



(III)

ואנחנו רוצים את מקרה (I) שבו תמונה של מפה מכווצת

נגדיר $x,y\in\mathbb{R}^d$ $\quad M:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ המפה.

$$x\longmapsto y-\varepsilon g(x)$$

$$x_{k+1}=Mx_k$$

נוכיח
$$x_k=M^k x_0 \xrightarrow[k\to\infty]{} \tilde{x}$$

כאשר
$$M\tilde{x}=\tilde{x}$$

משפט: יהי $\varepsilon>0$. $x_0\in\mathbb{R}^d$. נ"ח כי קיים $\lambda\in(0,1)$ ו- $\rho>0$ כך ש:

1) g מכווצת ב- $B_\rho(x_0)$

$$\forall\ y,z\in B_\rho(x_0)=\{x: |x_0-x|\le\rho\}$$

$$|g(y)-g(z)|\le\frac{\lambda}{\varepsilon}|y-z|$$ נקרא contraction

2) אם $x_1\in B_{(1-\lambda)\rho}(x_0)$

אז: א. $x_k\in B_\rho(x_0)$, $\forall k$

ב. הגבול $\tilde{x}=\lim_{k\to\infty}x_k$ קיים ומקיים

$$y=\tilde{x}+\varepsilon g(\tilde{x})$$

ג. $\tilde{x}$ הוא הפתרון היחיד תחת התנאים $1+2$.

- אם $g\in C^1$ אז $1+2$ מתקיימים.

הוכחה: צריך להראות למה: $|x_{k+1}-x_k|\le\lambda^k(1-\lambda)\rho$

ואז א. $|x_k-x_0|=\left|\sum_{i=1}^{k}x_i-x_{i-1}\right|\le$

$$\le\sum_{i=1}^{k}|x_i-x_{i-1}|\underset{\text{למה}}{\le}\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\lambda^i}_{\le\frac{1}{1-\lambda}}(1-\lambda)\rho\le\rho$$

4.03.14 3

ב. בדיוק כמו א'

$$|x_{k+1}-x_n| \le \lambda^k \rho$$

ולכן x_k סדרת קושי $\Leftarrow$ מתכנסת

נסמן את הגבול $\tilde{x}$

$$\begin{array}{ccc} x_{k+1} & = & y-\varepsilon g(x_k) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k\to\infty} \\ \tilde{x} & = & y-\varepsilon g(\tilde{x}) \end{array}$$

ז"א הלמה נותנת את א' וב'

<u>הוכחת הלמה:</u> נוכיח באינדוקציה

נכון עבור $k=1$ בגלל תנאי 2.

$$|x_{k+1}-x_k| = |\underbrace{\cancel{y}-\varepsilon g(x_k)}_{x_{k+1}} - (\cancel{y}-\varepsilon g(x_{k-1}))| =$$

$$= \varepsilon\,|g(x_k)-g(x_{k-1})| \underset{(1)}{\le} \cancel{\varepsilon}\cdot\frac{\lambda}{\cancel{\varepsilon}}\,|x_k-x_{k-1}| \underset{\text{אינדק'}}{\le}$$

<u>מש"ל למה</u> $\le \lambda\lambda^{k-1}(1-\lambda)\rho$

נוכיח את ג. יחידות הפתרון:

נניח שקיימות שתי נקודות שבת $\tilde{x}, \hat{x}$

$$|\hat{x}-\tilde{x}| = |y-\varepsilon g(\hat{x}) - (y-\varepsilon g(\tilde{x}))| = \varepsilon\,|g(\hat{x})-g(\tilde{x})| \le$$

$$\le \varepsilon\cdot\frac{\lambda}{\varepsilon}\,|\hat{x}-\tilde{x}|$$

$$\Rightarrow \quad |\hat{x}-\tilde{x}| \le \lambda\,|\hat{x}-\tilde{x}|$$

כאשר $\lambda<1$

מסקנה $|\hat{x}-\tilde{x}| = 0$

$\blacksquare$

אינטגרציה נומרית

(האינט' נקרא quadrature)

הבעיה $\int_a^b f(t)\,dt$

שימוש במד"ר $y' = f(x)$

$\Rightarrow y(t) = y(0) + \int_0^x f(t)\,dt$

הכללה לבעיה: (תוספת פונ' משקל) $\int_a^b f(t)w(t)\,dt$

$w(t) > 0$

השיטה: נרצה להחליף את האינטגרל בסכום סופי שיקרב אותו.

$$\int_a^b f(t)w(t)\,dt \approx \sum_{j=0}^{n-1} b_j f(c_j)$$

c_j נק' דגימה"
נקראים צמתים / nodes
b_j - משקלים / weights

$\{b_j\}_{j=0}^{n-1}$ ו- $\{c_j\}_{j=0}^{n-1}$ מגדירים את השיטה.

<u>הגדרה:</u> שיטת אינטגרציה נקראת מסדר p אם היא מדויקת (שגיאה אפס) לכל פולינום עד דרגה $p-1$.

<u>סימון:</u> $\mathbb{P}_r$: אוסף הפולינומים מדרגה $\leq r$

<u>משפט:</u> לכל n, ניתן למצוא שיטה עם n צמתים ומשקלים מסדר $p \geq n$.

<u>הוכחה:</u> השיטה צריכה להיות מדויקת ב- $\mathbb{P}_{n-1}$:
מספיק לבדוק שהשיטה מדויקת עבור בסיס שפורש את $\mathbb{P}_{n-1}$. הבסיס הטריוויאלי $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$.

4.03.14 (4)

כלומר

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_j c_j^k = \int_a^b t^k w(t)\,dt$$

עבור $k=0,\dots,n-1$

יש $2n$ נעלמים, n משוואות. נקבע כל $c_0,\dots,c_{n-1}$ שונים, ואז נפתור ונמצא $b_0,\dots,b_{n-1}$ מערכת לינארית n משוואות ו-n נעלמים.

$$Ab = F \qquad b=\begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{n-1}\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c_0^1 & c_0^2 & \cdots & c_0^{n-1} \\ 1 & c_1^1 & c_1^2 & \cdots & c_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c_{n-1}^1 & c_{n-1}^2 & \cdots & c_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} \int_a^b w(t)\,dt \\ \vdots \\ \int_a^b t^{n-1} w(t)\,dt \end{pmatrix}$$

A נקרא מטריצת וונדרמונדה Van dermonde

משפט $\det A = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} (c_i - c_j) \neq 0$ כי c_i שונים

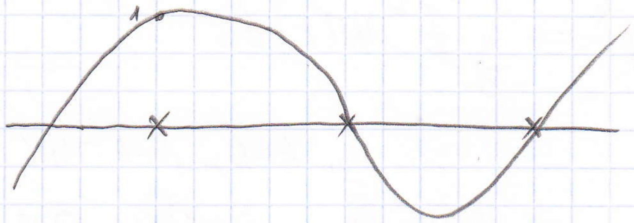
נוסחה למשקלים:

הגדרה: יהיו $\{c_j\}_{j=0}^{n-1}$ קבועים שונים.

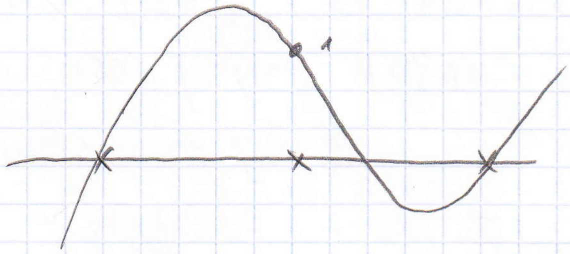
פולינומי לגרנז' מספר n, $p_j(t)$, $j=0,\dots,n-1$

$$p_j(c_k) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$$

p_0



p_1



$$\boxed{p_j(t) = \prod_{\substack{k=0,\dots,n-1 \\ k\neq j}} \frac{t-c_k}{c_j-c_k}}$$

<u>טענה:</u> לכל פולינום g מספר $\lneq n$ מתקיים

$$\forall t \,, \quad \sum_{j=0}^{n-1} p_j(t) g(c_j) = g(t)$$

<u>הוכחה:</u> מספיק להראות שהשוויון מתקיים ב n נקודות שונות.

$$c_0, \dots, c_{n-1}$$

נציב c_k

$$\sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{p_j(c_k)}_{=\delta_{jk}} g(c_j) = g(c_k)$$

<u>מסקנה:</u> נתבונן ב $g(t)=t^k$

$$\sum_{j=0}^{n-1} c_j^{\,k} \int_a^b p_j(t) w(t)\,dt = \int_a^b \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} p_j(t) c_j^{\,k}}_{t^k} w(t)\,dt$$

$$= \int_a^b t^k w(t)\,dt$$

$\Leftarrow$ אם נקח $b_j = \int_a^b p_j(t) w(t) dt$ היא סכימה מספר n.

כלל גאוס:

א. לכל $n>0$, קיים כלל סכימה מסדר $2n$.

ב. אין כלל סכימה מסדר $2n+1$.

רקע: פולינומים אורתוגונליים

נגדיר
$$\tilde{L}_2^w(a,b)=\left\{f : \int_a^b |f(t)|^2 w(t)\,dt<\infty\right\}$$
$w>0$

זהו מרחב לינארי.

על מרחב זה נגדיר נורמה:

$$\|f\|^2=\int_a^b |f(t)|^2 w(t)\,dt$$

כלומר

$$\tilde{L}_2^w(a,b)=\{f : \|f\|<\infty\}$$

$\|f\|$ הוא סמי-נורמה, מקיים:

1. $\|f\|\geq 0$
2. $\|cf\|=|c|\cdot\|f\|$
3. $\|f+g\|\leq\|f\|+\|g\|$

הערה: לא מתקיים 4. $\|f\|=0 \Rightarrow f=0$ ולכן זו סמי נורמה ולא נורמה.

- נגדיר מחלקת שקילות $f\sim g \iff \|f-g\|=0$

ואז:
$$L_2^w(a,b)=\tilde{L}_2^w(a,b)/\sim$$

$\|\cdot\|$ הינו נורמה מעל $L_2^w(a,b)$

מכפלה פנימית:

נגדיר

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(t)g(t)w(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \|f\|^2=\langle f,f\rangle$$

ג.3 $\langle f,g\rangle$ מ"פ.

הגדרה: פולינום מסדר m, p_m, נקרא פולינום אורתוגונלי מסדר m אם $p_m \perp \mathbb{P}_{m-1}$

כלומר:

$$\forall q\in\mathbb{P}_{m-1}:\ \langle p_m,q\rangle=0$$

לא יחיד: ניתן להכפילו בקבוע שונה מ0.

טענה: קיים פולינום אורתוגונלי מסדר m מוני-יחיד.

$$p_m=t^m+a_{m-1}t^{m-1}+\dots+a_0$$

הוכחה: נניח שיש שניים $p_m,\tilde{p}_m$

$$p_m-\tilde{p}_m\in\mathbb{P}_{m-1}$$

$$\Rightarrow \langle p_m,p_m-\tilde{p}_m\rangle=0,\quad \langle \tilde{p}_m,p_m-\tilde{p}_m\rangle=0$$

$$0=\langle p_m,p_m-\tilde{p}_m\rangle-\langle \tilde{p}_m,p_m-\tilde{p}_m\rangle$$

$$\blacksquare\quad 0=\langle p_m-\tilde{p}_m,p_m-\tilde{p}_m\rangle=\|p_m-\tilde{p}_m\|^2\Rightarrow p_m=\tilde{p}_m$$

דוגמאות: פולינומים אורתוגונלים "קלאסיים":

1. פולינומי יעקובי Jacobi $p_m^{(\alpha,\beta)}$

$[a,b]=[-1,1]$, $w(t)=(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, $\alpha,\beta\geq-1$

2. מקרה פרטי: $\alpha=\beta=0$ נקראים פולינומי לג'נדר Legendre $P_m(t)$

3. מקרה פרטי נוסף: $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$ נקראים פולינומי צ'ביצ'ב Chebyshev $T_m(t)$

$$w=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

4.03.14 | 6

4. בקטע $(0,\infty)$ $\quad w(t)=t^{\alpha}e^{-t}$ $\quad \alpha>-1$

$L_m^{(\alpha)}$ נקראים פולינומי לגר Laguerre

5. $w(t)=e^{-t^2}$ בקטע $(-\infty,\infty)$ נקראים

פולינומי הרמיט Hermite.

<u>משפט:</u> • כל האפסים של פולינומים אורתוגונליים נמצאים ב- (a,b).

• כל האפסים פשוטים (מדרגה אחת)

- לפי גאוס: לכל n, יש לבחור $c_0,\dots,c_{n-1}$ כאפסים של P_m,

את המשקלים לפי הנוסחה עם פולינומי לגרנג'

⇐ אז נקבל שיטת סכימה מסדר $2n$.